

分 类 号 _____
学校代码 10487

学号 M201672286
密级 _____

华中科技大学

硕士学位论文

二型模糊控制器控制性能的理论分 析与仿真研究

学位申请人： 宋志康

学 科 专 业： 自动化

指 导 教 师： 伍冬睿 教授

答 辩 日 期： 2018 年 5 月 30 日

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree for**

**Theoretical Analysis and Simulation Study of the Type-2
Fuzzy Logic Controllers**

**Candidate : Zhikang Song
Major : Automation
Supervisor : Prof. Dongrui Wu**

Huazhong University of Science & Technology

Wuhan 430074, P. R. China

April, 2018

独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除文中已标明引用的内容外，本论文不包含任何其他人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权华中科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本论文属于 ☐ 保密，在 ____ 年解密后适用本授权书。
☐ 不保密。

（请在以上方框内打“√”）

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

指导教师签名：

日期： 年 月 日

摘要

作为对一型模糊集的补充，Zadeh在1975年提出二型模糊集，其最大的特征在于它的隶属度本身就是个一型模糊集，而不再是一个确定的值，这解决了一型模糊集的局限性：处理不确定性能力有限。但是由于二型模糊集的计算代价很高，理解与使用起来比较复杂，应用最广泛的是区间二型模糊集。模糊集最常见的应用是在控制上。很多研究表明区间二型模糊控制器的控制性能要优于一型模糊控制器，具有更强的鲁棒性，但是目前对于二型模糊集的研究，实践超前于理论，有很多问题还亟待解决，因此本文将着重在理论上分析区间二型模糊控制器性能更优的原因，并进行仿真验证和将理论推广到广义二型模糊集上。主要内容为以下方面：

1. 区间二型模糊控制中降型操作中使用的算法是Kanik-Mendel算法，通过不断的迭代寻找边界，相对于一型模糊控制而言，运算代价还是很高，为了减小计算代价，许多学者都对此进行了研究，提出了很多TR算法，本文将选取几种高效的TR算法，比较它们的控制性能，对实际使用哪种算法效果更好，有一定参考意义。
2. 用等效的PID增益分析区间二型模糊控制器的特性，理论分析表明区间二型模糊控制器的等效PID增益比传统的PID增益更小，相关的仿真实验也证明更保守的参数使区间二型模糊控制器在稳定点更不容易震荡。
3. 用 α 平面表示广义二型模糊集，使区间二型模糊集的相关计算能够结合到广义的二型模糊集上，为区间二型模糊控制器的理论分析推广到广义二型模糊集上提供便利，基于此，我们并对近似二型模糊系统进行相关的仿真研究。
4. 气动肌肉具有非线性、迟滞性、参数时变等特性，本文将基于此平台，比较一型、区间二型以及近似二型这三种控制器的控制性能。

关键词：二型模糊集 鲁棒性 等效PID增益 模糊控制器

Abstract

In 1975, Zadeh proposed a type-2 fuzzy sets (T2 FSs) as an extension of type-1(T1) Fs. Compared with T1 FSs, the membership grade is a T1 FSs instead of crisp number, this characteristic may solve the limitations in the ability of T1 FSs to minimize the effect of uncertainties. However, because of the high computational cost of T2 FSs and the difficulties in understanding T2 FSs, IT2 FSs are most widely used in the real world. IT2 fuzzy logic controllers(IT2 FLC) have demonstrated better control performance in many applications, especially in control field. However, researches on T2 FSs is actually ahead of the theory, and there are many problems need to be solved. So, this article will focus on the theoretical analysis of IT2 FLCs, and give reasonable explanation why IT2 FLCs have better control performances. Then do some simulation experiments to validate the correctness of theoretical analysis, and expand it to GT2 FSs. The main content in this article can be concluded into four part:

1. This part is about the efficient TR approaches. Iterative Karnik-Mendel(KM) algorithms are widely used in IT2 FLCs, but it need to continuous iterations to find the boundary. This cause the higher cost in computation than their T1 counterparts. To reduce the high computational cost, many TR approaches have been proposed, this article will choose some efficient TR approaches to compare their control performances. This work may have reference meanings in choosing TR approaches.
2. This part focus on theoretical analysis of IT2 FLCs. Theoretical analysis demonstrated the equivalent PID gains of IT2 FLCs are smaller than traditional PID gains around the origin. Related simulation experiments have proved because of more conservative PID gains, IT2 FLCs may hard to shock around setpoints.
3. This part will introduce the α -Plane representation for T2 FSs, this representation method can make the set theoretic operations for T2 FSs be computed using very simple α -plane computations that are the set theoretic operations for IT2 FSs. Based on this method, this article will expand theoretical analysis of IT2 FLCs to T2 FLCs', and do some simulation experiment to validate theoretical analysis.
4. Pneumatic muscles have characteristics such as nonlinearity, hysteresis, and time-varying parameters. This article will compare the control performance of three types of controllers-T1 FLC, IT2 FLC, and QT2 FLC, based on this platform.

Key words: Type-2 fuzzy sets robustness equivalent PID gains fuzzy logic controllers

目 录

摘 要	I
Abstract	II
1 绪论	
1.1 引言	(1)
1.2 二型模糊集合理论	(2)
1.3 二型模糊系统	(5)
1.4 本文主要研究内容	(8)
2 区间二型模糊控制器中TR算法的性能比较	
2.1 引言	(9)
2.2 TR算法	(9)
2.3 仿真实例	(11)
2.4 本章小结	(15)
3 区间二型模糊控制器的理论分析	
3.1 区间二型模糊PID控制	(16)
3.2 区间二型PID FLC的等效比例, 积分, 微分增益	(20)
3.3 区间二型PD控制器的等效比例微分增益	(24)
3.4 仿真实验分析	(29)
3.5 本章小结	(33)
4 二型模糊控制器的理论分析	
4.1 二型模糊集的 α 平面表示	(35)
4.2 三角形QT2 FLS	(37)
4.3 仿真实验	(41)
4.4 本章小结	(42)
5 三种控制器控制性能的比较	
5.1 仿真实验	(44)
5.2 本章小结	(46)
6 结论	
6.1 全文总结	(48)
致 谢	(50)
参考文献	(51)
附录 1 攻读学位期间发表论文目录	(54)

1 绪论

1.1 引言

模糊理论是由L.A.Zadeh教授于1965年在《模糊集合》^[1]这篇论文中提出，这篇文章开创性的把“模糊”这个概念引入到科学领域中，标志了模糊理论的诞生。模糊理论指的是应用模糊集合（fuzzy sets, FSs）或者隶属度函数（membership function, MFs）的理论，主要有以下5个分支^[2]：

1. 模糊数学：对于经典集合理论，一个元素只有2种情况，要么属于，要么不属于这个集合。而模糊数学则是用模糊集合来扩充经典集合理论，不强调这种‘非此即彼’的现象，而是客观事物之间都有一种联系，没有明显的分界，即‘亦此亦彼’。
2. 模糊系统（fuzzy logic system, FLS）：一种基于知识或者基于规则的的系统，其核心是由IF-THEN组成的知识库。主要应用于信号处理，以及控制等场合。
3. 模糊逻辑与人工智能：引入经典逻辑学中的近似推理，并以模糊信息和近似推理为基础开发出模糊专家系统。
4. 不确定信息和理论：概率论、可行性理论、信赖性理论的统称。在现实生活中，人们会接触到各种信息，有些信息是确定的，但更常见的情况是这些信息是不确定的。怎样去认识和理解这些信息就需要这样的理论去解决这个问题。
5. 模糊决策：模糊集合与决策相结合的产物，用软约束来考虑优化问题，例如在多目标优化问题，如何对多层次的决策问题进行排列。

当然，这5个分支并不是相互独立的，他们之间往往是紧密相连的，例如模糊控制就需要使用到模糊数学与模糊逻辑。模糊理论从诞生到现在已经经过50多年了，其发展史可以总结为以下3个阶段：

1. 模糊理论的萌芽：1965年，Zadeh提出FSs的概念，标志这个理论的诞生。
2. 模糊理论的发展：1973年，Zadeh建立了模糊控制的基础理论；1975年Mamdani和Assilian^[3]创立了模糊控制器（Fuzzy logic controllers, FLCs）的基本框架，在此后的3年，Holmblad^[4]开发了第一个FLC。
3. 模糊理论的巨大飞跃：这个阶段，模糊理论的大规模应用使其发展迅速。例如，1980年，Sugeno首次将模糊理论应用到实际问题中—控制富士电子净水厂^[5]；20世纪80年代初，日立公司在地铁上开发出FLS，这是当时最先进的地铁系统。模糊理论在日本取得的巨大成功，使得学者们开始重视模糊理论，推动了模糊理论的蓬勃发展。

纵观模糊理论的发展,从实际应用的角度来看,模糊理论的应用主要集中在FLSs上,特别是在模糊控制领域上,国外有Hagras的自主移动机器人的导航控制^[6]; Lynch的船舶牵引柴油机速度控制^[7]; Kayacan 的四旋翼无人机起降控制等^[8]; 国内则有李洪兴教授的4级倒立摆的实物控制^[9]; 广东工业大学和湖南大学的两足机器人的行走控制^[9]; 华中科技大学的两轮移动小车上的倒立摆控制等^[10]。总之,在这半个多世纪的发展中,模糊理论由初期的不认可,到现在已经广泛应用各个领域,在理论与实际应用中都取得可喜的成就。

1.2 二型模糊集合理论

1.2.1 二型模糊集的提出

Zadeh在1965年提出一型模糊集(type-1 FSs, T1 FSs)作为对经典集合理论的补充,用于模仿人们在现实中使用不确定信息例如‘很高’,‘稍微’等,来解决问题。但是T1 FSs的隶属度是一个精确的值,也就是说一旦确定隶属度函数(MFs), T1 FSs便不再‘模糊’了,这也是T1 FSs的局限性—并不能完全地、直接地描述模糊性所引起的不确定性,即处理不确定性能力有限。于是, Zadeh 于1975年又提出了二型模糊集(Type-2 FSs, T2 FSs)的概念^[11],即将T1 FSs的隶属度模糊化,也就是说T2 FSs的隶属度本身就是T1 FSs,而不再是一个精确的值,这使其描述模糊性的能力更强。

T2 FSs的提出有效地解决了T1 FSs的局限性,因为T2 FSs的MFs是三维的,有更多的数学维度,有潜在能力掌控更多不确定信息,但是维度的增加,自然也增加了计算的复杂度,使其在现实应用中花费的代价更大,这极大阻碍了T2 FSs的发展, Zadeh 在1975年就提出这个概念,在此后的二十多年里却并没有多少学者进行相关的研究。九十年代末,人们渐渐意识到T1 FSs的局限性,以及得益于计算机的快速发展,使得人们开始对T2 FSs产生浓厚的兴趣。其中,美国南加州大学的教授J. M. Mendel等人对T2 FSs进行了理论的完善以及大力地推广,使其得到快速的发展,目前已经成功应用于决策^[12,13], 时间序列预测^[14], 自动控制^[15-17]等领域。为了解决T2 FSs计算代价大的问题, J. M. Mendel 等提出区间二型模糊集(interval type-2 FSs, IT2 FSs)的概念,一种特殊的T2 FSs—次级隶属函数(second MFs, SMFs)的隶属度都为1,这较大减少了T2 FSs的运算代价,目前,应用T2 FSs 的领域主要采用也就是IT2 FSs。但是广义的二型模糊集(General T2 FSs)比IT2 FSs 拥有更多的设计自由度(为了区分IT2 FSs与T2 FSs,用GT2 FSs表示T2 FSs),也就是说理论上使用GT2 FSs 的系统比使用IT2 FSs的系统效果更好,随着时间推移,以及对控制目标精度更高的要求, T2 FSs 的研究也会逐渐普遍。之前对GT2 FSs 的定义方式比较认可的有3种: 1. 基于点-值的表示, 2. 基于垂直切边的表示, 3. 基于波浪切片的表示。这3种方法中的第二种方法对于GT2 FSs的计算与理论研究还是很有用的,其他2种则从另外2种角度来分析。最近,基于 α -平面表示(也叫做水平切片)的GT2

FSs 的研究将GT2 FSs 的计算与IT2 FSs 的计算结合起来, 使得GT2 FSs 的计算更简单, 并基于此, 提出了一种介于IT2 FLS 与T2 FLS 的系统- 近似二型模糊逻辑系统(quasi-Type-2 Fuzzy logic system, QT2 FLS)。

1.2.2 二型模糊集的基本概念

图 1-1描述的是MF为三角型的GT2 FSs, 最顶部插入的图形描述的是在 $x = x'$ 处的SMFs, 底部插入的图形描述的是内嵌一型模糊集与对应的内嵌二型模糊集。从图中可以知道GT2 FSs 是三维的, 描述的是变量 x 与主隶属度函数 $\mathbf{MF}(x)$ 以及次隶属函数 $u_{\tilde{A}}(x)$ 之间的关系。图中各变量的含义参考表 1.1。对于GT2 FSs常见的定义方式

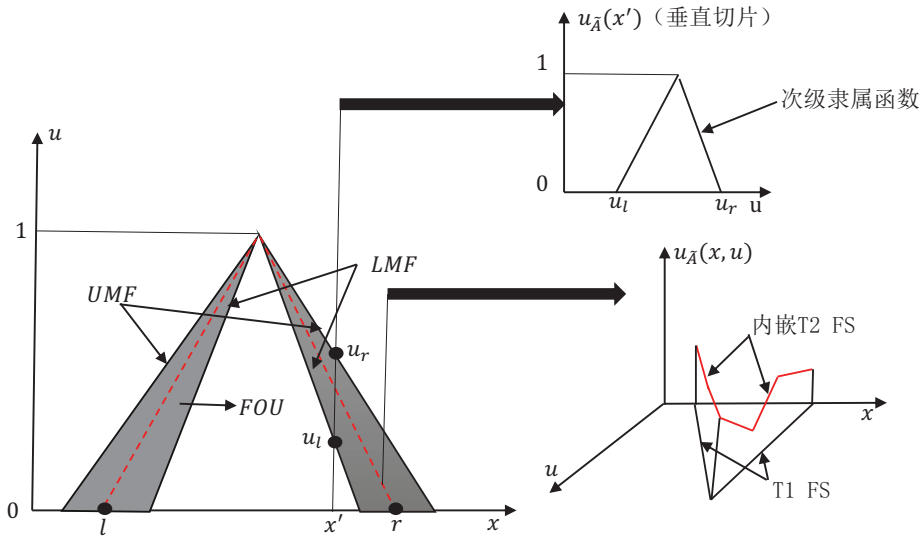


图 1-1 隶属函数为三角型的二型模糊集

有3种:

定义 1.1 (基于点-值表示^[18]): 给定论域 X , 并且 $x \in X$, 和次变量 J_x , GT2 FSs $\tilde{A}$ 由隶属度函数 $u_{\tilde{A}}(x, u)$ 表示为:

$$\tilde{A} = \{((x, u), u_{\tilde{A}}(x, u)) | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \quad (\text{式 1.1})$$

这种定义方式比较直观, 枚举所以满足条件的点, 不过除了推导出另外一种定义方式 1.2, 在计算与理论分析上并没有实际意义。

定义 1.2 (基于垂直切片的表示^[19]): 给定主变量的值, 例如使 $x = x'$, 以 u 和 $u_{\tilde{A}}(x', u)$ 为轴的二维平面我们称之为 $u_{\tilde{A}}(x, u)$ 的垂直切片(见 1-1的右顶部), 也叫做次级隶属度函数, 那么GT2 FSs $\tilde{A}$ 可以由次级隶属度函数 $u_{\tilde{A}}(x = x', u)$ 表示

表 1.1 二型模糊集中变量的定义

变量名	符号	文字描述
主变量	$x \in X$	论域 X 中的元素
主隶属度	J_x	主变量 x 对应的隶属度值，是个区间
次变量	$u \in J_x$	主隶属度 J_x 中的元素
次隶属度	$f_x(u)$	次变量对应的次级隶属度值
二型模糊集	$\tilde{A}$	由三维点 $(x, u, u_{\tilde{A}}(x, u))$ 构成的集合
不确定域	$FOU(\tilde{A})$	所有主隶属度的集合，或者 $LMF(\tilde{A})$ 与 $UMF(\tilde{A})$ 构成的区域
下限隶属度函数	$LMF(\tilde{A})$ 或 $\underline{u}_{\tilde{A}}(x)$	$FOU(\tilde{A})$ 的下限函数
上限隶属度函数	$UMF(\tilde{A})$ 或 $\bar{u}_{\tilde{A}}(x)$	$FOU(\tilde{A})$ 的上限函数
内嵌一型模糊集	$A_e(x)$	$FOU(\tilde{A})$ 包含的一型模糊集
内嵌二型模糊集	$\tilde{A}_e(x)$	$A_e(x)$ 所有元素的次级隶属度构成的集合
主隶属度函数	$MF(x)$	由三维点集 $(x, u, u_{\tilde{A}}(x, u))$ 确定的三维函数
次隶属度函数	$u_{\tilde{A}}(x)$	关于主隶属度的T1 FSs

为:

$$\tilde{A} = \int_{\forall x \in X} u_{\tilde{A}}(x)/x \quad (\text{式 1.2})$$

$$u_{\tilde{A}}(x) = u_{\tilde{A}}(x = x', u) = \int_{\forall u \in J_x \subseteq [0,1]} f_x(u)/u \quad (\text{式 1.3})$$

这种定义方式对于GT2 FSs的计算以及理论分析都是很实用的。

定义 1.3 (基于波浪切片的表示^[20]): 对于每个主变量 x_i ，内嵌T2 FSs $\tilde{A}_e^j$ (见图 1-1的底部图形的红线)的主隶属度都是唯一的，这种模糊集也被称作波浪式切片，GT2 FSs $\tilde{A}$ 可以用这种切片表示为:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\forall j} \tilde{A}_e^j \quad (\text{式 1.4})$$

这种定义方式很适合在理论上研究GT2 FSs，但对于GT2 FSs上的计算是比较困难的，因为需要大量的内嵌T2 FSs合才能描述完整的GT2 FSs合。

GT2 FSs的运算相对于T1 FSs而言复杂很多,为了解决这个问题,Liang和Mendel^[21]借鉴模糊逻辑的相关概念,将变量的次级隶属度都规定为1,IT2 FSs的概念便诞生出来,这大大简化了GT2 FSs的运算,因为IT2 FSs的特性完全可以由不确定域描述(footprint of uncertainty, FOU),可以直接在二维平面上分析,于是这使得IT2 FSs能广泛应用于工程实际中。

图 1-2是IT2 FSs的MF一个示例(为了区分IT2 FSs与GT2 FSs,本文我们使用 $\tilde{X}$ 表示IT2 FSs),从图中可以看出一个IT2 FSs $\tilde{X}$ 是由2个T1 FSs,上限隶属函数 $\overline{X}$ (upper membership function, UMF)和下限隶属函数 $\underline{X}$ (lower membership function, LMF)确定的, $\overline{X}$ 和 $\underline{X}$ 围成的阴影部分就是FOU。

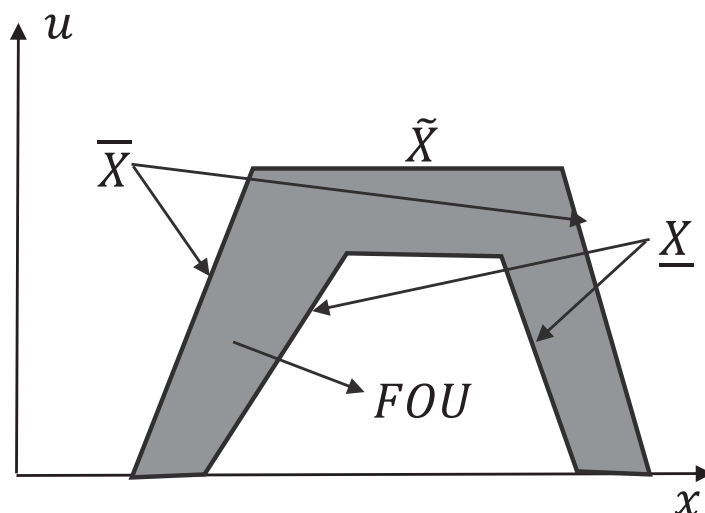


图 1-2 梯形IT2 FS 示例

1.3 二型模糊系统

模糊系统是一种基于知识或者规则的系统,其核心是IF-THEN构成的知识库,而这种知识库中的知识存在不确定性,通常需要依赖专家的先验知识,即使如此,IF前件或者THEN后件的隶属函数仍然无法精确定义。一型模糊系统(T1 FLSs)指的是IF前件或者THEN后件部分基于一型模糊集,如果基于T2 FSs便是二型模糊系统(T2 FLSs)。由于是基于T2 FS, T2 FLSs自然在处理不确定性问题上,性能更好。T2 FLSs的结构框图如图 1-3所示。T2 FLSs的结构与一型模糊系统最大的区别在于多了降型器这部分,由于推理机的输出是一个T2 FSs,需要通过降型器将T2 FSs映射成T1 FSs,才能使用T1 FLSs的去模糊化操作,降型器(type-reduction, TR)这部分通常使用的是迭代Karnik-Mendel(KM)算法。

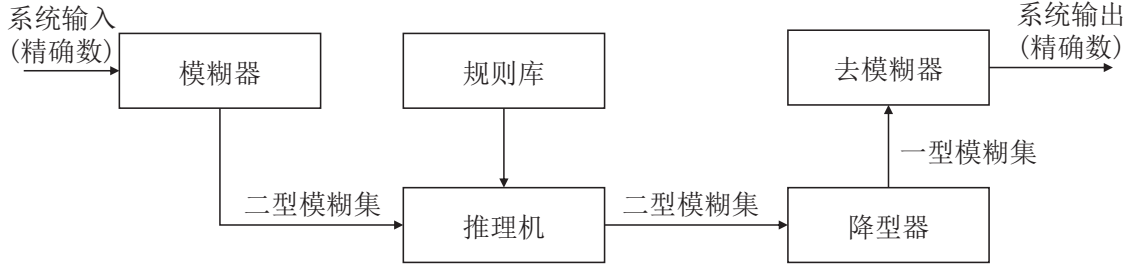


图 1-3 T2 FLSs结构框图

由于T2 FLSs计算很复杂，下面以IT2 FLSs为例说明具体是怎么计算的。假定一个多输入单输出IT2 FLSs的有 N 条规则库，具体形式为：

其中 $\tilde{X}_i^n (i = 1, \dots, I)$ 是IT2 FSs, $Y^n = [\underline{y}^n, \bar{y}^n]$ 是一个区间，可以理解为后验集的中心^[14]，或者用最简单的TSK模型替换。在实际应用中，简单起见，通常假设 $\underline{y}^n = \bar{y}^n$ 。对于 I 个输入变量 $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_I)$ ，IT2 FLSs的计算通常有以下4步：

1. 计算变量 x'_i 在每个区间T2 FSs的隶属度区间 $[\mu_{\underline{X}_i^n}(x'_i), \mu_{\bar{X}_i^n}(x'_i)]$, $i = 1, 2, \dots, I$, $n = 1, 2, \dots, N$.
2. 计算第 n 条规则对应的目标区间 $F^n(\mathbf{x}')$ （采用最小 t -范数,或者乘积 t -范数，本文主要使用后者）：

$$\begin{aligned}
 F^n(\mathbf{x}') &= [\mu_{\underline{X}_1^n}(x'_1) \times \dots \times \mu_{\underline{X}_I^n}(x'_I), \\
 &\quad \mu_{\bar{X}_1^n}(x'_1) \times \dots \times \mu_{\bar{X}_I^n}(x'_I)] \\
 &\equiv [\underline{f}^n, \bar{f}^n], \quad n = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{式 1.5}$$

3. 根据式(1.5)中计算的 $F^n(\mathbf{x}')$ 以及对应的规则进行降型处理，降型的方法有很多种，例如重心法，顶点法，集合中心法，本文使用最常用的集合中心降型法^[14]：

$$Y_{cos}(\mathbf{x}') = \bigcup_{\substack{f^n \in F^n(\mathbf{x}') \\ y^n \in Y^n}} \frac{\sum_{n=1}^N f^n y^n}{\sum_{n=1}^N f^n} = [y_l, y_r] \tag{式 1.6}$$

4. 计算出去模糊化的结果：

$$y = \frac{y_l + y_r}{2}. \tag{式 1.7}$$

下面针对(式 1.6)介绍下KM算法是怎么计算得到 y_l 和 y_r 。KM算法由2部分组成，

一部分用于计算 y_l ，另外一部分用于计算 y_r ，形式如下：

$$f_l(k) = \frac{\sum_{n=1}^k \underline{y}^n \bar{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \underline{y}^n \underline{f}^n}{\sum_{n=1}^k \bar{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \underline{f}^n} \quad (\text{式 1.8})$$

$$f_r(k) = \frac{\sum_{n=1}^k \bar{y}^n \underline{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \bar{y}^n \bar{f}^n}{\sum_{n=1}^k \underline{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \bar{f}^n} \quad (\text{式 1.9})$$

其中 k 是整数，取值范围在 $[1, N-1]$ 之间，集合 $\{\underline{y}^n\}, \{\bar{y}^n\}$ 按升序排列，我们的目标是求取 $Y_{\cos}(\mathbf{x}')$ 的上限与下限，因此上式可以重写为：

$$\begin{aligned} y_l &= \min_{k \in [1, N-1]} f_l(k) \equiv f_l(L) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^L \underline{y}^n \bar{f}^n + \sum_{n=L+1}^N \underline{y}^n \underline{f}^n}{\sum_{n=1}^L \bar{f}^n + \sum_{n=L+1}^N \underline{f}^n} \\ y_r &= \max_{k \in [1, N-1]} f_r(k) \equiv f_r(R) \\ &= \frac{\sum_{n=1}^R \bar{y}^n \underline{f}^n + \sum_{n=R+1}^N \bar{y}^n \bar{f}^n}{\sum_{n=1}^R \underline{f}^n + \sum_{n=R+1}^N \bar{f}^n} \end{aligned}$$

式子中的 L 和 R 是切换点，满足以下不等式：

$$\begin{aligned} \underline{y}^L &\leq y_l < \underline{y}^{L+1} \\ \bar{y}^R &< y_r \leq \bar{y}^{R+1}. \end{aligned}$$

现在问题就变成找到满足这样条件的切换点，以计算 y_l 为例，将所有的 $\underline{y}^n$ 沿着水平方向按从小到大排列，对应的 $F(n)$ 也需做相应的位置变化。在 $\underline{y}^L$ 的左侧取较大的权重($F(n)$ 的上限)，在其右侧取较小的权重($F(n)$ 的下限)，这样便能保证 y_l 是求得的最小值。 y_r 的计算类似与 y_l ，只是在 $\underline{y}^R$ 的两侧取的权重与 $\underline{y}^L$ 相反。具体的图形解释见图 1-4，表 1.2 则是具体的算法流程。

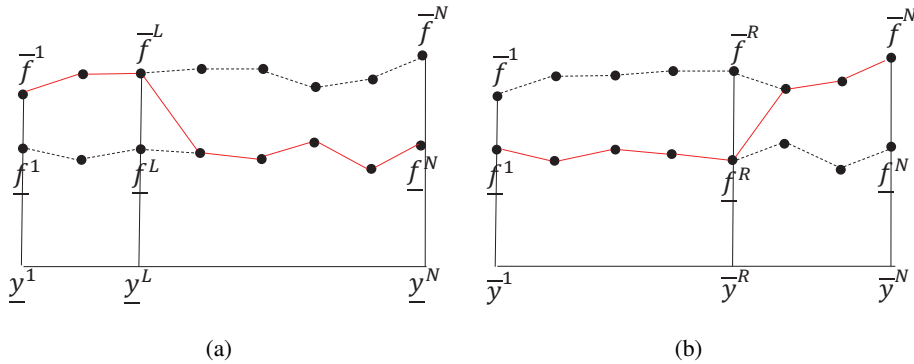


图 1-4 计算 y_l 和 y_r 的图形解释

表 1.2 KM算法

步骤	计算 y_l	计算 y_r
1.	初始化 $f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}$ 并计算 $y = \frac{\sum_{n=1}^N y^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}$	初始化 $f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}$ 并计算 $y = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}$
2.	找到满足条件 $\underline{y}^l < y \leq \underline{y}^{l+1}$ 的 l 且 $l \in [1, N-1]$	找到满足条件 $\bar{y}^r < y \leq \bar{y}^{r+1}$ 的 r 且 $r \in [1, N-1]$
3.	使 $f^n = \begin{cases} \bar{f}^n, & n \leq l \\ f^n, & n > l \end{cases}$ 并计算出 $y' = \frac{\sum_{n=1}^N y^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}$	使 $f^n = \begin{cases} f^n, & n \leq r \\ \bar{f}^n, & n > r \end{cases}$ 并计算出 $y' = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}$
4.	如果 $y' = y$, 停止迭代使 $y_l = y$ 和 $L = l$ 否则, 使 $y = y'$, 重复步骤2, 3	如果 $y' = y$, 停止迭代使 $y_r = y$ 和 $R = r$ 否则, 使 $y = y'$, 重复步骤2, 3

1.4 本文主要研究内容

本文主要研究T2 FSs在模糊控制系统方面的应用, 从理论上分析T2 FLCs的控制性能, 以及相关的仿真验证。全文共五章, 第二章至第五章为本文的主要内容, 是作者硕士阶段, 在二型模糊系统理论分析及仿真研究中的主要工作。具体内容涉及到二型模糊系统在自动控制方面的理论与应用。论文的主要内容概括如下:

第二章介绍IT2 FLCs中的TR算法, 对于大多数IT2 FLCs而言, 在TR阶段主要使用的还是KM算法, 但是相对于T1 FLCs而言运算代价还是很高, 对此, 研究者们提出很多TR算法, 这章将基于这些TR算法, 基于双水箱模型比较他们的控制性能。

第三章介绍IT2 FLCs的理论分析, 从理论上分析IT2 FLCs为什么有更强的鲁棒性, 并在仿真实验上验证。

第四章介绍 α 平面来描述T2 FSs, 并基于这个理论将IT2 FSs的相关运算结合到T2 FSs中, 将第三章的理论推广到GT2 FSs中。

第五章则基于气动肌肉的事物平台, 比较T1 FLC, IT2 FLC以及QT2 FLC的控制性能。

2 区间二型模糊控制器中TR算法的性能比较

2.1 引言

在很多应用领域，相对于T1 FLCs，IT2 FLCs的都能表现出更好的控制性能，但是IT2 FLCs需要将IT2 FSs降型成T1 FSs才能去模糊化，而这种TR算法通常采用的是KM算法，KM算法是一种迭代算法，计算代价很高，这阻碍了IT2 FLCs在现实中的应用，为了减小计算代价，许多学者都对此进行了研究，提出了很多TR算法。总结为以下三种：

1. 基于KM算法的改进^[22-26]。这类算法基于KM算法，在初始化，终止条件等优化，直接减少了迭代次数，减小了计算代价。
2. 可替代算法^[27-34]。KM算法因为没有解析解所以需要迭代才能找到最优解，而大部分可替代算法是有解析解，是一类快速逼近KM算法的方法。
3. 简单型IT2 FLSs^[35,36]。这类通过简化区间二型模糊系统来减小计算代价，在最重要的输入区间使用IT2 FSs在其他区间使用T1 FSs。

在先前的研究中，文献^[37]全面比较了多种不同TR算法的计算代价，建议在第一类算法中采用EODS或者EIASC，在第二类算法中采用WT，NT，BMM以及GCCJ。虽然这些算法都很高效，但是哪一个算法的控制性能最好仍然是一个开放的问题，本章将比较这几种算法的控制性能。

2.2 TR算法

2.2.1 EIASC算法

EIASC算法^[25]与EODS算法是第一类算法中最高效的两种，由于EIASC实现起来相对更简单点，本章以EIASC算法为例。EIASC算法是IASC算法的改进算法。IASC算法的思想是基于这样的事实：式（1.8）中的 $f_l(k)$ 随着k的增大，先单调减小，然后单调增加，式（1.9）中的 $f_r(k)$ 则与之相反。因此，当 $f_l(k)$ 停止减小，便得到 y_l ，当 $f_r(k)$ 停止增加，便得到 y_r 。EIASC则在此基础上做了2步改进：1. 终止条件；2. 更合理的初始条件。具体的算法实现见表 2.1。

2.2.2 Wu-Tan(WT)算法

WT算法^[28]是一种有解析解形式的TR去模糊方法，这种方法的思想是用等效的T1隶属度 $u_{X_i^n}(x_i)$ 来代替目标区间值 $[\mu_{\underline{X}_i^n}(x'_i), \mu_{\overline{X}_i^n}(x'_i)]$ ，式子如下：

$$\mu_{X_i^n}(x_i) = \mu_{\overline{X}_i^n}(x_i) - h_i^n(\mathbf{x})[\mu_{\overline{X}_i^n}(x_i) - \mu_{\underline{X}_i^n}(x_i)]$$

表 2.1 EIASC算法

步骤	计算 y_l	计算 y_r
1.	初始化 $a = \sum_{n=1}^N \underline{y}^n \underline{f}^n$ $b = \sum_{n=1}^N \underline{f}^n$ $L = 0$	初始化 $a = \sum_{n=1}^N \bar{y}^n \underline{f}^n$ $b = \sum_{n=1}^N \underline{f}^n$ $R = N$
2.	计算出 $L = L + 1$ $a = a + \underline{y}^L (\bar{f}^L - \underline{f}^L)$ $b = b + \bar{f}^L - \underline{f}^L$ $y_l = a/b$	计算出 $a = a + \bar{y}^R (\bar{f}^R - \underline{f}^R)$ $b = b + \bar{f}^R - \underline{f}^R$ $y_r = a/b$ $R = R - 1$
3.	如果 $y_l \leq y^{L+1}$, 停止迭代; 否则, 重复步骤2, 3.	如果 $y_r \geq y^R$, 停止迭代; 否则, 重复步骤2, 3.

其中, $h_i^n(\mathbf{x})$ 是关于输入向量 $\mathbf{x}$ 的函数, 对于不同的IT2 FSs, $h_i^n(\mathbf{x})$ 是不同的。由于隶属度区间已经变成一个T1 隶属度, 所以可以直接使用T1的去模糊化方法直接得出输出为:

$$y = \frac{\sum_{n=1}^N y^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}.$$

2.2.3 Nie-Tan(NT)算法

NT算法^[29]是另外一种解析形式的TR去模糊方法, 这种方法是取 F^n 区间的均值作为 f^n , 即:

$$f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}$$

这样目标区间就变成了一个点, 然后依据一型的去模糊化方法得出最终的结果。

2.2.4 GCCJ算法

GCCJ方法^[31]的思想是用递归的方法求取具有代表性的内嵌一型模糊集来代替IT2 FSs, 在本章中, 简单起见, 使用简化的内嵌一型集即:

$$\mu_X(x) = \frac{\mu_{\underline{X}}(x) + \mu_{\bar{X}}(x)}{2}$$

从这个式子可以看出, 使用并非严格意义上的内嵌一型模糊集, GCCJ方法实际是一种特殊的WT方法, 当WT方法中的所有 $h_i^n(\mathbf{x})$ 都取0.5 时, 便变成了GCCJ 方法。

表面上看GCCJ方法与NT方法有些类似，这只有当只有一维输入变量的时候，2种方法才一样，当有二维或者以上输入变量的时候，2种方法是不一样的，他们计算目标隶属度方式分别为：

$$f_{GCCJ}^n = \prod_{i=1}^I \frac{\mu_{\underline{X}_i^n}(x_i) + \mu_{\overline{X}_i^n}(x_i)}{2}$$

$$f_{NT}^n = \frac{\prod_{i=1}^I \mu_{\underline{X}_i^n}(x_i) + \prod_{i=1}^I \mu_{\overline{X}_i^n}(x_i)}{2}$$

2.2.5 BMM算法

BMM方法^[38]的思想则是利用UMFs以及LMFs的信息构建2个1型模糊集，并对这2个T1 FSs的输出施加相应的权重，加权平均后作为最终的输出，具体计算为：

$$y = \alpha \frac{\sum_{n=1}^N \underline{f}^n y^n}{\sum_{n=1}^N \underline{f}^n} + \beta \frac{\sum_{n=1}^N \overline{f}^n y^n}{\sum_{n=1}^N \overline{f}^n}. \quad (\text{式 2.1})$$

其中， α 和 β 是相应的相关系数，可以通过优化算法得出最佳的值。

2.3 仿真实例

2.3.1 实验对象

本章比较这5类TR算法的控制效果采用的是双水箱水位控制模型，如图 2-1所示。该装置由蓄水池上方的两个水箱组成，两个独立的水泵将水抽到每个水箱的顶部，水箱的水位则由带有传感器的探头测量。水箱的两侧都有一个出水口，两个水箱之间的挡板控制水之间的流通。流回蓄水池的水量与水箱水位高度的平方根近似成正比，是一种典型的非线性系统。

双水箱模型的具体数学表达式为：

$$A_1 \frac{dH_1}{dt} = Q_1 - \alpha_1 \sqrt{H_1} - \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \quad (\text{式 2.2})$$

$$A_2 \frac{dH_2}{dt} = Q_2 - \alpha_2 \sqrt{H_2} + \alpha_3 \sqrt{H_1 - H_2} \quad (\text{式 2.3})$$

其中 A_1 ， A_2 分别是水箱1和2的底面积， H_1 ， H_2 分别是其水位高度， Q_1 ， Q_2 分别是水泵1，2的水流量(cm^3/s)， α_1 ， α_2 ， α_3 是与 $\sqrt{H_1}$ ， $\sqrt{H_2}$ ， $\sqrt{H_1 - H_2}$ 相关的常量。使 $Q_2 = 0$ ，水箱模型可以简化为单输入单输出模型(SISO)。

IT2 FLCs以反馈误差 e 以误差的变化率 $\dot{e}$ 作为输入，以控制信号的变化率 $\dot{u}$ 作为输出。将每个输入变量的论域划分为3个部分，分别标记为N(negative)，Z(zero)和P(positive)，采用TSK模型，具体规则库见表2-1。隶属度函数采用高斯型，

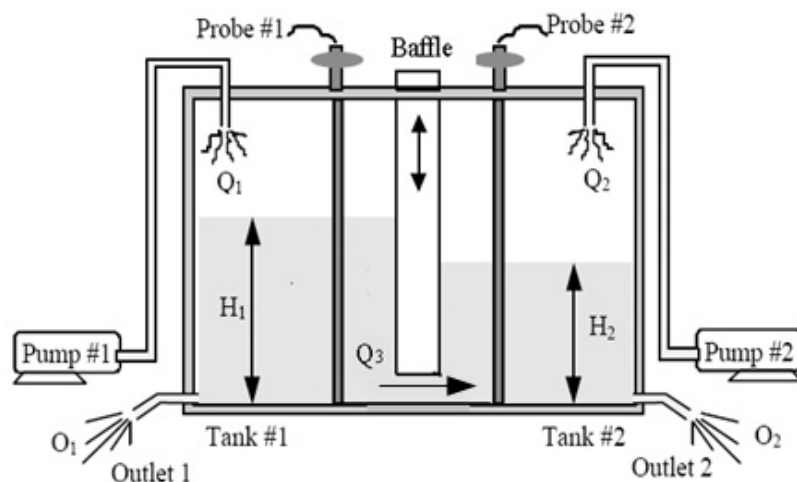


图 2-1 双水箱水位控制模型

在先前的研究中，文献^[39]已经说明采用高斯型的隶属度函数可以避免控制平面不连续性的问题。每个高斯型IT2 FS由3个参数确定：均值(m)，不确定的标准差($[\delta_1, \delta_2]$)。一个IT2 FLC有6个隶属度函数以及5个输出，因此需要优化的参数总共为 $3 \times 6 + 5 = 23$ 个。

表 2.2 IT2FLC的规则库

$e \backslash \dot{e}$	N_e	Z_e	P_e
N_e	$\dot{u}_1$	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_3$
Z_e	$\dot{u}_2$	$\dot{u}_3$	$\dot{u}_4$
P_e	$\dot{u}_3$	$\dot{u}_4$	$\dot{u}_5$

2.3.2 最优化过程

在1章节，已经指出模糊系统设计通常需要依赖专家的先验知识，即使如此，隶属度函数依然难以精确确定，也就是说很难通过人工来校准这些参数，因此需要一些自动优化的方法，例如数学规划，基于梯度的算法，启发式算法，进化算法等^[40]。本文选取遗传算法（genetic algorithm, GA）作为优化算法，来优化这些参数。

GA是一种全局搜索的方法，是模拟自然界生物进化机制的一种算法，即遵循适者生存、优胜劣汰的法则，也就是寻优过程中有用的保留，无用的则去除。在科学和生产实践中表现为，在所有可能的解决方法中找出最符合该问题所要求的条件的解决方法，即找出一个最优解。图2-2是基本GA的流程图，首先，随机产生初始化

种群，种群的每个个体都是所求最优问题的解之一，根据适应度函数计算每个个体的适应度，适应度越高的个体被选取的概率越大，根据选取的个体，复制基因，进行个体之间的交叉、变异。随着迭代次数的进行，种群中适合最优问题的个体便越来越多，直到满足终止条件得到最终解。

文献^[41]是最开始将GA用于设计T1 FLSs，用GA设计T2 FLCs则相对复杂点，总结为2种：

1. 两步法，这种方法首先设计一个尽可能好的T1 FLS，然后基于设计好的T1 FLS，去优化T2 FLS 的其他参数，这种方法需要优化的参数相对更少，而且能保证优化后的结果不比T1 FLS 差；
2. 一步法，这种方法直接优化所有的参数，不依赖T1 FLS。

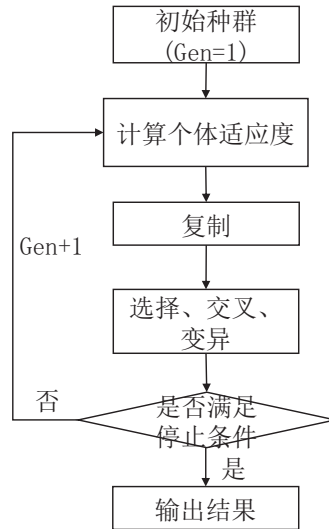


图 2-2 基本GA算法的流程图

式（2.3）描述的水箱的理想模型并不能准确描述实际模型的特征，例如在实际过程中，会有传输延迟或者外部干扰等，由于存在这样的模型不确定性，在仿真模型上性能表现好的IT2 FLCs，通常在实际模型上，性能表现会变差，为了避免这个问题，得到最好的控制器，在仿真设计过程考虑表格 2.3所示的4种模型。适应度函数则选取时间加权的绝对误差(integral of the time-weighted absolute errors, ITAEs)作为衡量指标来评价每个个体，ITAEs 越小表明该算法控制性能越好，具体如式（2.4）所示：

$$F = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{N_i} j \cdot e_i(j) \right] \quad (\text{式 2.4})$$

其中， $e_i(j)$ 是指第*i*个模型在第*j*个采样点，设定点与实际水位的差值， α_i 对应4个模型的权重。采样点的总个数为 $N_i = 200$ ，步长取1s，由于第二个模型

表 2.3 用GA优化参数的4种模型

	I	II	III	IV
$A_1 = A_2$ (cm ²)	36.52	36.52	36.52	36.52
$\alpha_1 = \alpha_2$	5.6186	5.6186	5.6186	5.6186
α_3	10	10	10	8
设定点(cm)	0 $\rightarrow$ 15	0 $\rightarrow$ 22.5 $\rightarrow$ 7.5	0 $\rightarrow$ 15	0 $\rightarrow$ 15
传输延迟(s)	0	0	2	0

的ITAE比其他模型的要大不少，为了确保每个模型的重要性一样，取 $\alpha_2 = 1/3$ ，其他几个权重都取为1。虽然遗传算法是一种全局最优算法，实际上由于初始种群的随机性以及仿真的有限时间，我们并不能保证每次都能得到全局最优解，因此对于每个TR算法，我们都重复30次并记录每次最好的参数。我们在遗传算法中去种群的个体数为100，交叉率取0.8，变异率取0.1，每个算法在迭代500次后，都能得到收敛的解。

2.3.3 实验结果

图 2-3是5种TR算法在训练模型上性能表现的箱型图，由于在WT算法中取 $h_i^n(x) = 0.5$ ，所以WT算法的结果与GCCJ算法的结果一致，从图像来看，这几种算法的性能表现很接近，通过进一步的方差分析（Analysis of Variance, ANOVA），结果显示，这些TR算法在训练模型上的性能表现并没有统计意义上的显著区别（ $p = 0.5338$ ）。

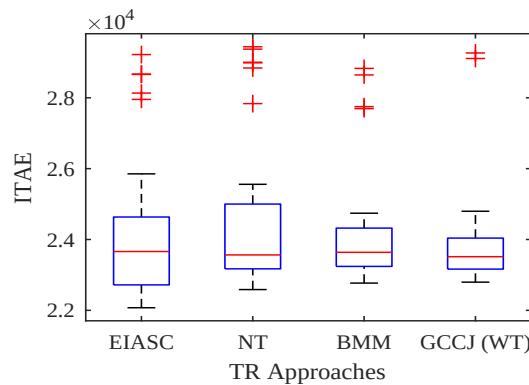


图 2-3 5种TR算法在训练模型上的箱型图

接下来测试IT2 FLCs处理模型不确定性的能力，如图 2-4所示。图 2-4(a)是5种TR算法在测试模型（加入2s延迟）性能表现的箱型图，结果显示，他们的性能表

现很接近，进一步做方差分析，在测试模型上也没有显著的区别 ($p = 0.3740$)。图 2-4(b)则是另外一种测试模型（取 $\alpha_3 = 8$ 和加入1s延迟），得出的结论与前面一致。总之，5种TR算法在训练和测试模型上都没有统计意义上显著的差别，不过图 2-3， 2-4也表明WT(GCCJ)的ITAEs更紧凑，也就是说跑很多次的GA，他们的性能表现会比较接近。

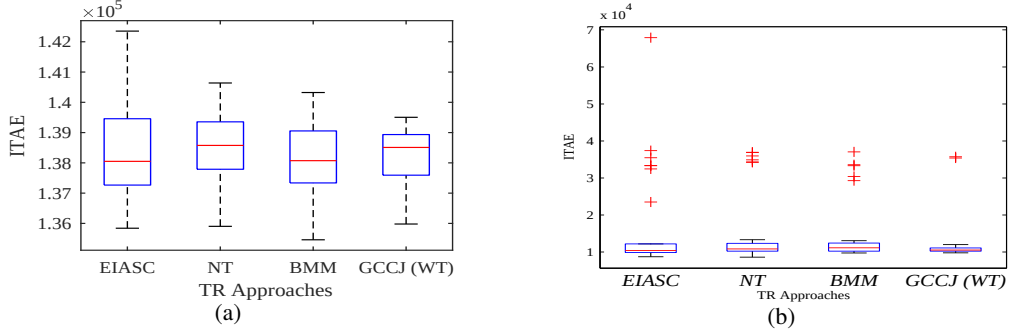


图 2-4 5种TR算法在2种测试模型上的箱型图.(a)只加入2s延迟; (b)取 $\alpha_3 = 8$ 和加入1s延迟

2.4 本章小结

本章研究了IT FLCs中TR算法的性能，主要比较5种高效的TR算法(EIASC, NT, BMM, WT, GCCJ)，针对模糊控制系统中隶属函数难以人为确定的问题，采用了遗传算法来进行参数的优化，并详细地设计了IT2 FLCs。仿真结果虽然表明，这5种高效的TR算法没有统计意义上显著差别，但是也提供了一定的参考意见，在设计IT2 FLCs时，可以选取他们当中的任何一个。

3 区间二型模糊控制器的理论分析

3.1 区间二型模糊PID控制

模糊理论最常见应用于模糊控制。早期的一型模糊控制通常以反馈误差 e 以及相应的误差变化率 $\dot{e}$ 作为输入。这种T1 FLCs是用来模拟非线性PID控制器。当使用三角隶属函数来特征化输入域并且推理机由“乘积-和-重心法”(“product-sum-gravity”)实现时, T1 FLC等效于PID控制器^[42]。以IT2 PID控制器为例, 假设 u 是控制信号, e 是设定值与实际响应的误差, $\int e$ 是误差积分, $\dot{e}$ 是误差变化率, 那么PID 控制器可以定义成这样的形式:

$$u = K_P e + K_I \int e + K_D \dot{e} \quad (\text{式 3.1})$$

其中 K_P , K_I 和 K_D 分别为比例, 积分和微分增益, 但是 $\int e$ 通常并不直接作为PI或者PID 控制器的输入^[3,43,44], 其中一个原因是很难确定其范围, 这就导致其隶属函数不能确定。从另一方面来说, 确定 e , $\dot{e}$ 和 $\ddot{e}$ 的范围就相对容易很多, 即对式(3.1)求导。因此, PID 控制器可以改写成这样的形式:

$$\dot{u} = K_P \dot{e} + K_I e + K_D \ddot{e} \quad (\text{式 3.2})$$

如图 3-1所示, IT2 PID控制器则可以通过划分 e , $\dot{e}$ 和 $\ddot{e}$ 的区域来构建, 而这些区域可以使用FOU是任意形状的IT2 FSs。后验集根据推理机中的模糊规则得到, 并且是T1 FSs, 其中心为:

$$\dot{u}_{ijk} = K_{P,ijk} \cdot P_{\dot{e}_i} + K_{I,ijk} \cdot P_{e_j} + K_{D,ijk} \cdot P_{\ddot{e}_k} \quad i, j, k = 1, 2, \dots, N \quad (\text{式 3.3})$$

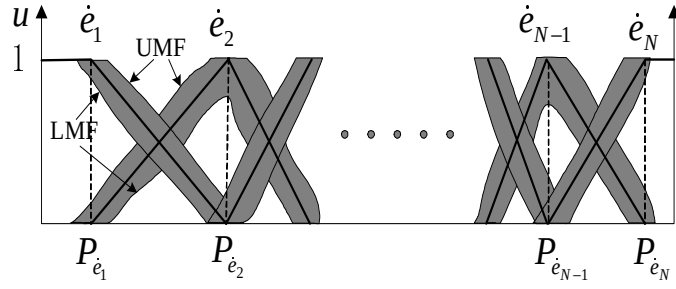
其中 $K_{P,ijk}$, $K_{I,ijk}$ 和 $K_{D,ijk}$ 是指定规则下的PID增益, $P_{\dot{e}_i}$, P_{e_j} 和 $P_{\ddot{e}_k}$ 是内嵌式1型集的顶点(图 3-1的粗线)对应的值。为了使理论部分能够适用不同论域范围, 先介绍2个定理, 关于平移后验集和缩放输入集是怎样影响IT2 FLS的输出。

3.1.1 平移性

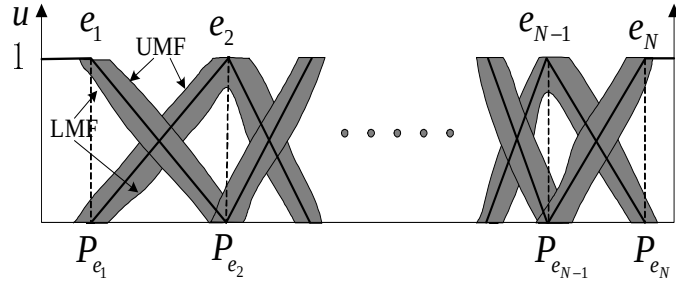
定理 3.1: 假定 $\widetilde{FLS}_1$ 是 N 输入单输出的IT2 FSs, 其推理机由 q 条规则组成, 每条规则的形式如下:

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_1^{i_1 i_2 \dots i_N}(\widetilde{R}_1^k) : & \text{ If } x_1 \text{ is } \widetilde{X}_{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } \widetilde{X}_{i_2} \text{ and } \dots \text{ and } x_N \text{ is } \widetilde{X}_{i_N} \\ & \text{ then } y \text{ is } Y_{1, i_1 i_2 \dots i_N} \end{aligned}$$

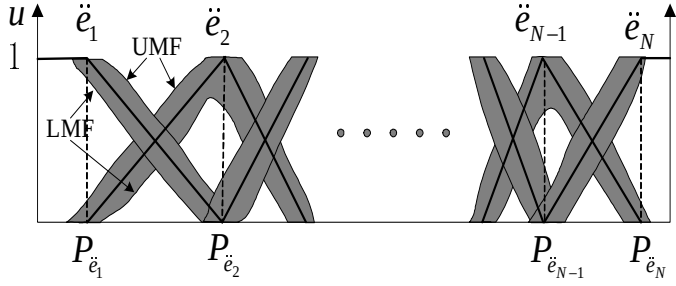
其中 $\widetilde{X}_{i_j} (j = 1 \dots N)$ 是IT2 FSs。 $Y_{1, i_1 i_2 \dots i_N}$ 是T1 FSs, 其中心为 $Y_k (k = 1, \dots, q)$, 假定所有的规则满足 $Y_1 \leq \dots \leq Y_k \leq \dots Y_q$ 。



(a)



(b)



(c)

图 3-1 模糊PID控制器的输入隶属度函数. (a) $\dot{e}$ 的隶属度函数; (b) e 的隶属度函数; 和(c) $\ddot{e}$ 的隶属度函数.

假设 $\widetilde{FLS}_2$ 是另一个 IT2 FLS，其输入区间的特征与 IT2 FSs $\widetilde{FLS}_1$ 一样。将 $\widetilde{FLS}_1$ 的输出集平移 δ 长度 (δ 非零常数) 作为 $\widetilde{FLS}_2$ 的后验集，可以得到 $\widetilde{FLS}_2$ 对应的 q 条控制规则：

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_2^{i_1 i_2 \dots i_N}(\widetilde{R}_2^k) : & \text{ If } x_1 \text{ is } \widetilde{X}_{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } \widetilde{X}_{i_2} \text{ and } \dots \text{ and } x_N \text{ is } \widetilde{X}_{i_N} \\ & \text{ then } y \text{ is } Y_{2, i_1 i_2 \dots i_N} \end{aligned}$$

其中 $Y_{2, i_1 i_2 \dots i_N}$ 的中心为 $Y_k - \delta$ 。那么，可以得到这样的结论：对于同样的输入向量 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ ， $\widetilde{FLS}_2(y_{\widetilde{FLS}_2})$ 的输出等于 $y_{\widetilde{FLS}_1} - \delta$ ，其中 $y_{\widetilde{FLS}_1}$ 是 $\widetilde{FLS}_1$ 的输出。

证明: 假定输入向量是 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, 那么与 $\widetilde{F\widetilde{L}S_1}$ 第 k 条规则相关的目标集是个区间:

$$\tilde{f}_k = [\underline{f}_k(x_1, x_2, \dots, x_N), \bar{f}_k(x_1, x_2, \dots, x_N)] \equiv [\underline{f}_k, \bar{f}_k] \quad (\text{式 } 3.4)$$

其中 $\underline{f}_k = \mu_{\widetilde{X}_{i_1}}(x_1) \star \dots \star \mu_{\widetilde{X}_{i_N}}(x_N)$ 和 $\bar{f}_k = \bar{\mu}_{\widetilde{X}_{i_1}}(x_1) \star \dots \star \bar{\mu}_{\widetilde{X}_{i_N}}(x_N)$ 。使用中心集降型方法, $\widetilde{F\widetilde{L}S_1}$ 降型后的输出集是具有如下形式的T1 FSs:

$$[y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,l}}, y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,r}}] = \int_{f_1 \in [\underline{f}_1, \bar{f}_1]} \dots \int_{f_q \in [\underline{f}_q, \bar{f}_q]} 1 / \frac{\sum_{k=1}^q \underline{f}_k Y_k}{\sum_{k=1}^q \underline{f}_k} \quad (\text{式 } 3.5)$$

使用KM算法可以求出 $y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,l}}$ 和 $y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,r}}$, 那么 $\widetilde{F\widetilde{L}S_1}$ 去模糊化的结果可以表示为:

$$y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1}} = \frac{y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,l}} + y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,r}}}{2} \quad (\text{式 } 3.6)$$

其中:

$$y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,l}} = \min_{L \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k Y_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k Y_k}{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k} \right) \quad (3.7a)$$

$$y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,r}} = \max_{R \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^R \underline{f}_k Y_k + \sum_{k=R+1}^q \bar{f}_k Y_k}{\sum_{k=1}^R \underline{f}_k + \sum_{k=R+1}^q \bar{f}_k} \right) \quad (3.7b)$$

由于2个FLCs的先验集是一样的, 与 $\widetilde{F\widetilde{L}S_2}$ 第 k 条规则($\widetilde{R}_2^{i_1 i_2 \dots i_N}$) 相关的目标集具有式(3.4)的形式。由于后验T1 FSs的中心平移了 δ 长度, 那么降型后输出集的边界为:

$$\begin{aligned} y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_2,l}} &= \min_{L \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k (Y_k - \delta) + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k (Y_k - \delta)}{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k} \right) \\ &= \min_{L \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k Y_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k Y_k}{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k} - \delta \right) \\ &= \min_{L \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k Y_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k Y_k}{\sum_{k=1}^L \bar{f}_k + \sum_{k=L+1}^q \underline{f}_k} \right) - \delta \\ &= y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,l}} - \delta \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\begin{aligned} y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_2,r}} &= \max_{R \in \{1, \dots, q\}} \left(\frac{\sum_{k=1}^R \underline{f}_k (Y_k - \delta) + \sum_{k=R+1}^q \bar{f}_k (Y_k - \delta)}{\sum_{k=1}^R \underline{f}_k + \sum_{k=R+1}^q \bar{f}_k} \right) \\ &= y_{\widetilde{F\widetilde{L}S_1,r}} - \delta \end{aligned} \quad (3.8b)$$

因此, $\widetilde{F\widetilde{L}S_2}$ 的输出是:

$$y_{\widetilde{FLS}_2} = \frac{y_{\widetilde{FLS}_2,l} + y_{\widetilde{FLS}_2,r}}{2} = \frac{y_{\widetilde{FLS}_1,l} - \delta + y_{\widetilde{FLS}_1,r} - \delta}{2} = y_{\widetilde{FLS}_1} - \delta \quad (\text{式 3.9})$$

也就是将 $\widetilde{FLS}_1$ 的输出平移 δ 长度。 $\square$

该定理的作用是可以通过平移输入集，使分析FLS中指定模糊区域的输入-输出关系更容易，例如：

$$y_{\widetilde{FLS}_1}(x_1, \dots, x_N) = y_{\widetilde{FLS}_2}(x'_1, \dots, x'_N) - \delta \quad (\text{式 3.10})$$

考虑在 3.1 节描述的 IT2 模糊 PID 控制器，并记为 $\widetilde{FLC}_1$ 。假设输入向量为 $(\dot{e}, e, \ddot{e})$ ，其中 $P_{\dot{e}_i} \leq \dot{e} \leq P_{\dot{e}_{i+1}}$ ， $P_{e_j} \leq e \leq P_{e_{j+1}}$ 和 $P_{\ddot{e}_k} \leq \ddot{e} \leq P_{\ddot{e}_{k+1}}$ ，并把 6 个 IT2 FSs 依次标记为图 3-2(a) 所示的 $\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i+1}, \tilde{e}_j, \tilde{e}_{j+1}, \tilde{e}_k$ 和 $\tilde{e}_{k+1}$ 。阴影部分是 FOU，黑色的粗线是移除 FOU 后，T1 FSs 的 MFs。根据(式 3.3)，后验集为 T1 FSs 的中心为：

$$\dot{u}_{l,m,n} = K_{P,lmn}P_{\dot{e}_l} + K_{I,lmn}P_{e_m} + K_{D,lmn}P_{\ddot{e}_n} \quad (\text{式 3.11})$$

其中 $l = i, i+1, m = j, j+1, n = k, k+1$ ，总共有 $2*2*2 = 8$ 个表达式。记 $\widetilde{FLC}_2$ 为另外一个 IT2 PID 控制器，并且该控制器的先验集如图 3-2(b) 所示，是通过平移 $\widetilde{FLC}_1$ ($\tilde{e}_i, \tilde{e}_{i+1}, \tilde{e}_j, \tilde{e}_{j+1}, \tilde{e}_k$ 和 $\tilde{e}_{k+1}$) 的输入集得到的，这样使得到的模糊分区以原点为中心。那么， $\widetilde{FLC}_2$ 后验集的中心满足以下形式：

$$\begin{aligned} \dot{u}'_{l,m,n} &= K_{P,lmn}P'_{\dot{e}_l} + K_{I,lmn}P'_{e_m} + K_{D,lmn}P'_{\ddot{e}_n} \\ &= K_{P,lmn}(P_{\dot{e}_l} - d_{\dot{e}}) + K_{I,lmn}(P_{e_m} - d_e) + K_{D,lmn}(P_{\ddot{e}_n} - d_{\ddot{e}}) \\ &= \dot{u}_{l,m,n} - \delta \end{aligned} \quad (\text{式 3.12})$$

其中 $\delta = (K_{P,ijk}d_{\dot{e}} + K_{I,ijk}d_e + K_{D,ijk}d_{\ddot{e}})$ ， $d_{\dot{e}} = \frac{P_{\dot{e}_i} + P_{\dot{e}_{i+1}}}{2}$ ， $d_e = \frac{P_{e_j} + P_{e_{j+1}}}{2}$ 和 $d_{\ddot{e}} = \frac{P_{\ddot{e}_k} + P_{\ddot{e}_{k+1}}}{2}$ 。根据定理 3.1，如果输入向量是 $(\dot{e}', e', \ddot{e}') = (\dot{e} - d_{\dot{e}}, e - d_e, \ddot{e} - d_{\ddot{e}})$ ，那么 $\widetilde{FLC}_2$ 的输出比 $\widetilde{FLC}_1$ 小 δ 。 $\widetilde{FLC}_1$ 和 $\widetilde{FLC}_2$ 之间的关系表明：任何由如图 3-2(b) 所示先验集得到的结果都可以推广到不关于原点对称的模糊分区。由于 T1 FLS 是 IT2 FLS (移除 FOU) 的一种特例，因此也有移动特性。基于这个原因，分析中心为原点的输入空间即可。

3.1.2 缩放性质

通常来说，模糊系统中不同模糊分区的范围是不一样的，例如图 3-2(b) 中的 $P'_{\dot{e}_i} P'_{\dot{e}_{i+1}} \neq P'_{e_j} P'_{e_{j+1}} \neq P'_{\ddot{e}_k} P'_{\ddot{e}_{k+1}}$ 。但是，如果模糊分区都是等长度将更容易分析，特别是区间为 $[-1, 1]$ 的部分。下面的定理说明把所有的输入域归一化到区间 $[-1, 1]$ 是有可能的。

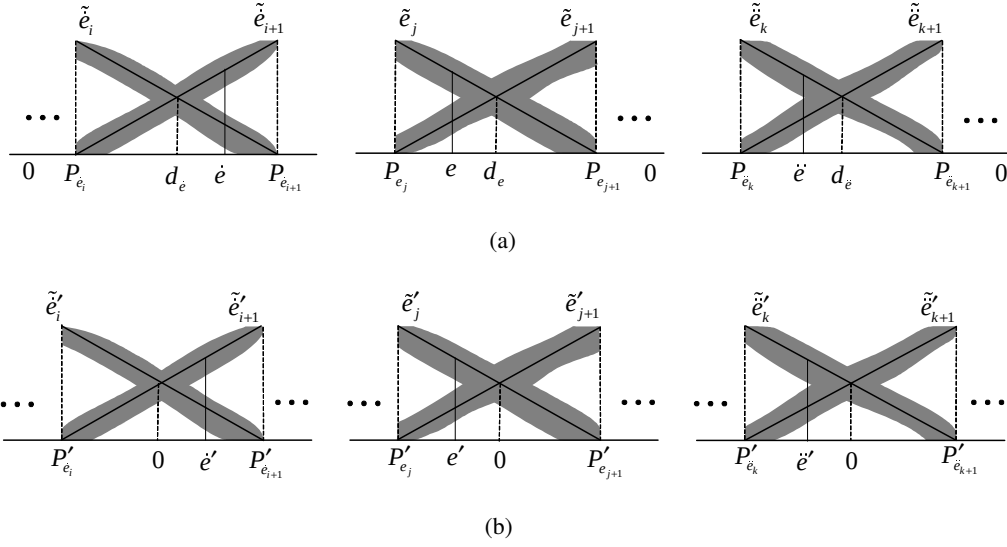


图 3-2 平移不变性的图形示例. (a) 模糊集的中心不在原点; (b) 将 3-2(a) 的模糊集中心移动到原点.

定理 3.2: 假设 $\widetilde{FLS}_1$ 和 $\widetilde{FLS}_2$ 都是 N 个输入单输出的 2 型 FLSs, 并且都有同样的规则和后验集, 唯一的区别是它们的论域大小不同。由于 2 型 FLSs 有平移的性质(定理 3.1), 因此只需考虑中心在原点的模糊分区。假定 $\widetilde{FLS}_1$ 模糊分区的 N 个输入域区间分别为 $[-a_1, a_1], [-a_2, a_2], \dots, [-a_N, a_N]$, 而 $\widetilde{FLS}_2$ 的 N 个输入域区间均为 $[-1, 1]$ 。那么, 输入向量为 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 的 $\widetilde{FLS}_1$ 的输出与输入向量为 $(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \dots, \frac{x_N}{a_N})$ 的 $\widetilde{FLS}_2$ 的输出相等。

证明: 考虑图 3-3 中的模糊集, 其中 x_i 对应 $\widetilde{FLS}_1$ 的第 i 个输入, $\frac{x_i}{a_i}$ 对应 $\widetilde{FLS}_2$ 的第 i 个输入。由于二型模糊集 $\tilde{X}'_{i1}$, $\tilde{X}'_{i2}$ 的 MFs 以及输入向量都是同时缩放, 因此它们与 $\tilde{X}_{i1}$, $\tilde{X}_{i2}$ 的目标强度是一样的, 这也使得 $\widetilde{FLS}_1$ 与 $\widetilde{FLS}_2$ 中规则对应的目标集也一样, 也就是说 $\widetilde{FLS}_1$ 和 $\widetilde{FLS}_2$ 的输出是相等的。□

定理 3.2 的作用是将所有的模糊分区缩放到区间 $[-1, 1]$, 使分析变得更简单。总之, 两个定理的作用, 使为了更方便地分析不同情况下的 IT2 FSs。

3.2 区间二型 PID FLC 的等效比例, 积分, 微分增益

前面已经描述三角形 MF 的 T1 PID 控制器等效于固定参数的 PID 控制器。相比之下, 由于 IT2 FSs 的 FOU 能提供额外的自由度, 使得区间 2 型模糊 PID 控制器的每个分区等效于变增益的 PID 控制器。本节会将 IT2 PID 控制器的等效比例, 积分, 微分增益作为替代 FOU 的函数。为了得到相应的解析解, 还需要施加相应的限制条件, 即这种解析解是在特殊情况下得到的。使用等效的 PID 增益能够使 T2 PID FLC 非线性

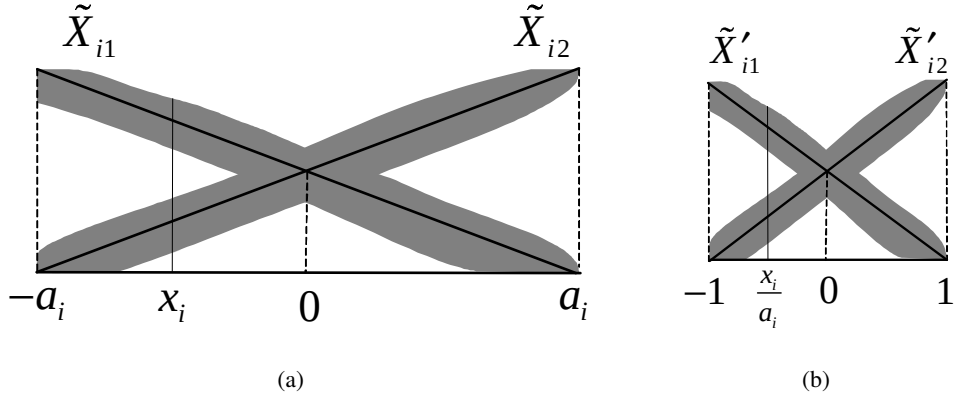


图 3-3 缩放性质的图形解释. (a) 原始的对此输入域; (b) 缩放后的输入域.

的特性展现出来, 而这些特性是由额外维度产生的。为了达到这个目标, 基本的系统应该是线性的, 例如在没有 FOU 的情况下, 模糊系统输入与输出之间的映射应该是线性的。这种结构的 IT2 模糊 PID 控制器可以理解为降型后的 1 型模糊 PID 控制器, 并且等效的比例增益 K_P , 积分增益 K_I , 微分增益 K_D 是不变的, 并使用“乘-和-重心”方法去模糊化。图 3-4 是本节所使用的对称三角型 2 型集, 这种 2 型 PID FLC 的控制规则为:

$$\tilde{R}^{ijk}: \quad \text{If } \dot{e} \text{ is } \tilde{e}_i \text{ and } e \text{ is } \tilde{e}_j \text{ and } \ddot{e} \text{ is } \tilde{e}_k, \quad \text{then } \dot{u} \text{ is } \dot{u}_{ijk}$$

由式(3.3)知 $\dot{u}_{ijk} = K_P P_{\dot{e}_i} + K_I P_{e_j} + K_D P_{\ddot{e}_k}$ 。

假设在特定的分区, $\dot{e}$, e 和 $\ddot{e}$ 的论域分别限制在 $[-a_1, a_1]$, $[-a_2, a_2]$ 和 $[-a_3, a_3]$ 内。简单起见, 假设把这 3 个模糊论域的范围缩放到 $[-1, 1]$, 并且满足 $P_{\dot{e}_1} = P_{e_1} = P_{\ddot{e}_1} = -1$, $P_{\dot{e}_2} = P_{e_2} = P_{\ddot{e}_2} = 1$ 。如果原始模糊集的 1 型后验集的中心满足:

$$\dot{u}_{111} = -a_1 K_P - a_2 K_I - a_3 K_D \quad (3.13a)$$

$$\dot{u}_{112} = -a_1 K_P - a_2 K_I + a_3 K_D \quad (3.13b)$$

$$\dot{u}_{121} = -a_1 K_P + a_2 K_I - a_3 K_D \quad (3.13c)$$

$$\dot{u}_{122} = -a_1 K_P + a_2 K_I + a_3 K_D \quad (3.13d)$$

$$\dot{u}_{211} = a_1 K_P - a_2 K_I - a_3 K_D \quad (3.13e)$$

$$\dot{u}_{212} = a_1 K_P - a_2 K_I + a_3 K_D \quad (3.13f)$$

$$\dot{u}_{221} = a_1 K_P + a_2 K_I - a_3 K_D \quad (3.13g)$$

$$\dot{u}_{222} = a_1 K_P + a_2 K_I + a_3 K_D \quad (3.13h)$$

那么, 根据定理 3.2, 经缩放的模糊集与原始模糊集输出相同。

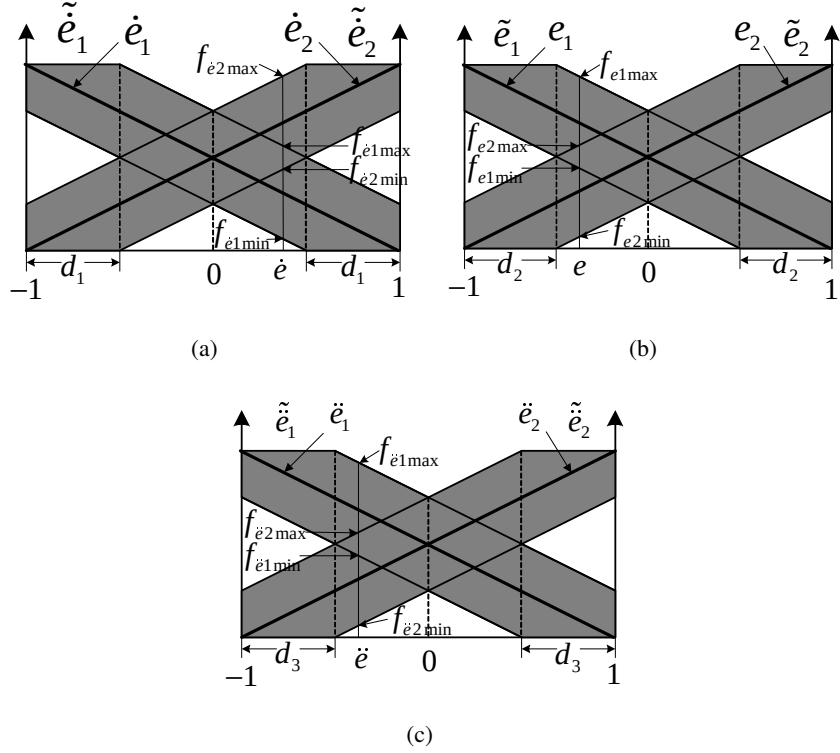


图 3-4 2型模糊PID控制器的输入隶属度函数. (a) $\dot{e}$ 的隶属函数; (b) e 的隶属函数; (c) $\ddot{e}$ 的隶属函数.

首先, 使输入空间满足以下不等式:

$$|\dot{e}| \leq 1 - d_1 \quad (3.14a)$$

$$|e| \leq 1 - d_2 \quad (3.14b)$$

$$|\ddot{e}| \leq 1 - d_3 \quad (3.14c)$$

在这些区域中, 与输入向量 $(\dot{e}, e, \ddot{e})$ (根据定理 3.2, 输入向量必须在给定范围内) 相关的目标值有如下形式:

$$f_{\dot{e}_1} = [f_{\dot{e}_{1min}}, f_{\dot{e}_{1max}}] = \left[\frac{1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1}}{2}, \frac{1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} \right] \quad (3.15a)$$

$$f_{\dot{e}_2} = [f_{\dot{e}_{2min}}, f_{\dot{e}_{2max}}] = \left[\frac{1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1}}{2}, \frac{1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} \right] \quad (3.15b)$$

$$f_{e_1} = [f_{e_{1min}}, f_{e_{1max}}] = \left[\frac{1 - d_2 - \frac{e}{a_2}}{2}, \frac{1 + d_2 - \frac{e}{a_2}}{2} \right] \quad (3.15c)$$

$$f_{e_2} = [f_{e_{2min}}, f_{e_{2max}}] = \left[\frac{1 - d_2 + \frac{e}{a_2}}{2}, \frac{1 + d_2 + \frac{e}{a_2}}{2} \right] \quad (3.15d)$$

$$f_{\tilde{e}_1} = [f_{\tilde{e}_{1min}}, f_{\tilde{e}_{1max}}] = \left[\frac{1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2}, \frac{1 + d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2} \right] \quad (3.15e)$$

$$f_{\tilde{e}_2} = [f_{\tilde{e}_{2min}}, f_{\tilde{e}_{2max}}] = \left[\frac{1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2}, \frac{1 + d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2} \right] \quad (3.15f)$$

然后依据控制规则得到相关的目标集:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{111} &= f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{111}, \bar{f}_{111}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 - \frac{e}{a_2})(1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 - \frac{e}{a_2})(1 + d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{112} &= f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_2} = [\underline{f}_{112}, \bar{f}_{112}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 - \frac{e}{a_2})(1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 - \frac{e}{a_2})(1 + d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{121} &= f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{121}, \bar{f}_{121}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 + \frac{e}{a_2})(1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 + \frac{e}{a_2})(1 + d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{122} &= f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_2} = [\underline{f}_{122}, \bar{f}_{122}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 + \frac{e}{a_2})(1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 + \frac{e}{a_2})(1 + d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{211} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{211}, \bar{f}_{211}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 - \frac{e}{a_2})(1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 - \frac{e}{a_2})(1 + d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{212} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_2} = [\underline{f}_{212}, \bar{f}_{212}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 - \frac{e}{a_2})(1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 - \frac{e}{a_2})(1 + d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{221} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{221}, \bar{f}_{221}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 + \frac{e}{a_2})(1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 + \frac{e}{a_2})(1 + d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \\ \tilde{f}_{222} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_2} = [\underline{f}_{222}, \bar{f}_{222}] \\ &= \left[\frac{(1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 - d_2 + \frac{e}{a_2})(1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8}, \frac{(1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1})(1 + d_2 + \frac{e}{a_2})(1 + d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3})}{8} \right] \end{aligned}$$

使用中心集降型方法, 得出2型模糊PID控制器的降型输出为:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{\tilde{f}_{111}\dot{u}_{111} + \tilde{f}_{112}\dot{u}_{112} + \tilde{f}_{121}\dot{u}_{121} + \tilde{f}_{122}\dot{u}_{122} + \tilde{f}_{211}\dot{u}_{211} + \tilde{f}_{212}\dot{u}_{212} + \tilde{f}_{221}\dot{u}_{221} + \tilde{f}_{222}\dot{u}_{222}}{\tilde{f}_{111} + \tilde{f}_{112} + \tilde{f}_{121} + \tilde{f}_{122} + \tilde{f}_{211} + \tilde{f}_{212} + \tilde{f}_{221} + \tilde{f}_{222}} \\ &= [\dot{u}_l, \dot{u}_r] \end{aligned} \quad (\text{式 } 3.16)$$

接下来通过KM迭代方法计算出 $\dot{u}_l$ 和 $\dot{u}_r$ 。由于这种算法需要将后验集的中心升序排列，而后验集中心的大小又依赖于 a_1K_P , a_2K_I 和 a_3K_D 的值，也就是说这些中心之间的相对位置有多种情况。只有当模糊控制器的输出与输入的是线性关系时，才存在等效比例，积分，微分增益的解析解，当 $a_1K_P \geq a_2K_I \geq a_3K_D$ 和 $a_1K_P \geq a_2K_I + a_3K_D$ 同时满足，这种情况才能发生，也就是说 $u_{i,j,k}(i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2)$ 满足以下不等式：

$$\dot{u}_{111} \leq \dot{u}_{112} \leq \dot{u}_{121} \leq \dot{u}_{122} \leq 0 \leq \dot{u}_{211} \leq \dot{u}_{212} \leq \dot{u}_{221} \leq \dot{u}_{222} \quad (\text{式 3.17})$$

为了得到等效PID增益的闭环形式，需要首先得到KM降型器的表达式，一般情况下，并不能得到这样的表达式。但是，可以通过施加如下的限制条件来简化问题：

$$\dot{u}_{122} \leq \dot{u}_l \leq \dot{u}_r \leq \dot{u}_{211} \quad (\text{式 3.18})$$

文献^[45]已经证明转换点使降型集 $[\dot{u}_l, \dot{u}_r]$ 的边界与相关的嵌入式1型集一致。因此，式(3.18)指出转换点会位于 $\dot{u}_{122}$ 和 $\dot{u}_{211}$ 之间。将 $L = 4$ 和 $R = 4$ 代入到(3.7a)和(3.7b)中得到降型集的边界：

$$\dot{u}_l = \frac{\bar{f}_{111}\dot{u}_{111} + \bar{f}_{112}\dot{u}_{112} + \bar{f}_{121}\dot{u}_{121} + \bar{f}_{122}\dot{u}_{122} + \bar{f}_{211}\dot{u}_{211} + \bar{f}_{212}\dot{u}_{212} + \bar{f}_{221}\dot{u}_{221} + \bar{f}_{222}\dot{u}_{222}}{\bar{f}_{111} + \bar{f}_{112} + \bar{f}_{121} + \bar{f}_{122} + \bar{f}_{211} + \bar{f}_{212} + \bar{f}_{221} + \bar{f}_{222}} \quad (\text{3.19a})$$

$$\dot{u}_r = \frac{f_{111}\dot{u}_{111} + f_{112}\dot{u}_{112} + f_{121}\dot{u}_{121} + f_{122}\dot{u}_{122} + f_{211}\dot{u}_{211} + f_{212}\dot{u}_{212} + f_{221}\dot{u}_{221} + f_{222}\dot{u}_{222}}{f_{111} + f_{112} + f_{121} + f_{122} + f_{211} + f_{212} + f_{221} + f_{222}} \quad (\text{3.19b})$$

将(3.13)和(3.16)代入到(3.19)，得到2型FLC的输出为：

$$\dot{u} = \frac{\dot{u}_l + \dot{u}_r}{2} = \theta K_P \dot{e} + \beta K_I e + \gamma K_D \ddot{e} \quad (\text{式 3.20})$$

其中：

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{a_1^2(1 - d_2^2)(1 - d_3^2)}{a_1^2(1 + d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)^2 - (d_2 + d_3)^2\dot{e}^2} \\ \beta &= \frac{a_1^2(1 + 2d_1d_3 + d_2d_3 + d_1d_2 + d_1d_2d_3^2 + d_1^2d_2d_3 + d_1^2d_3^2) - \dot{e}^2d_3(d_2 + d_3)}{a_1^2(1 + d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)^2 - (d_2 + d_3)^2\dot{e}^2} \\ \gamma &= \frac{a_1^2(1 + 2d_1d_2 + d_2d_3 + d_1d_3 + d_1d_2^2d_3 + d_1^2d_2d_3 + d_1^2d_2^2) - \dot{e}^2d_2(d_2 + d_3)}{a_1^2(1 + d_1d_2 + d_1d_3 + d_2d_3)^2 - (d_2 + d_3)^2\dot{e}^2} \end{aligned}$$

θK_P , βK_I 和 γK_D 分别为此种2型FLC的等效比例，积分，微分增益。通过计算知， θ 比1小，由此得知，2型模糊PID控制器的等效比例增益比对应的1型模糊PID控制器要小。当 $d_1 \geq d_2$ 时， β 比1小，当 $d_1 \geq d_3$ 时， γ 也比1小。

3.3 区间二型PD控制器的等效比例微分增益

这部分将讨论区间二型模糊PD控制器。PD控制器可以看做 $K_I = 0$ 的一种特

例。因此这部分的计算等同于可以在前一章节使 $K_I = 0$ ，不过又有些略微差别，因为PD控制器不存在 $\int e$ 这项，也就是说，直接使用 u 做输出即可，而不需要 $\dot{u}$ 。图3-4(a)和(b)是本节使用的对称IT2 FSs，其中 $P_{\tilde{e}_1} = P_{e_1} = -1$ ， $P_{\tilde{e}_2} = P_{e_2} = 1$ 。这种区间二型模糊PD控制器的控制规则为：

$$\tilde{R}^{ji} : \quad \text{If } e \text{ is } \tilde{e}_j \text{ and } \dot{e} \text{ is } \tilde{e}_i, \quad \text{then } u \text{ is } u_{ji}$$

使(3.13)中的 K_I 为零，得到IT2 FLC后验集的中心为：

$$u_{11} = -a_2 K_P - a_1 K_D \quad (3.21a)$$

$$u_{12} = -a_2 K_P + a_1 K_D \quad (3.21b)$$

$$u_{21} = a_2 K_P - a_1 K_D \quad (3.21c)$$

$$u_{22} = a_2 K_P + a_1 K_D \quad (3.21d)$$

同样使输入空间满足以下不等式：

$$|e| \leq 1 - d_2 \quad (\text{式 } 3.22)$$

$$|\dot{e}| \leq 1 - d_1 \quad (\text{式 } 3.23)$$

图3-5的阴影部分描述了输入变量的有效域，输入向量为 $(e, \dot{e})$ 的目标值式(3.15a)–(3.15d)已经给出。

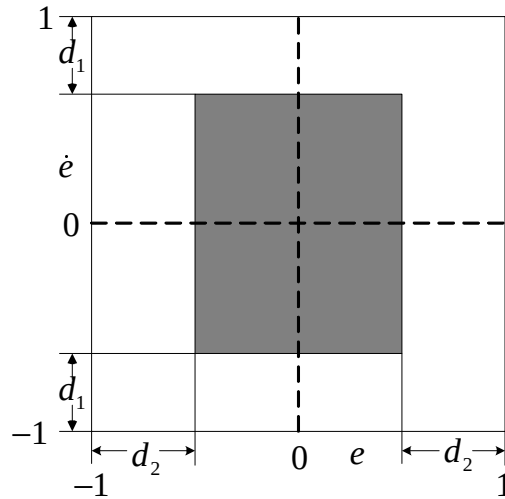


图 3-5 由(3.23)和(3.22)确定的输入变量范围.

与这4条控制规则相关的目标集为：

$$\tilde{f}_{11} = f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{11}, \bar{f}_{11}]$$

$$= \left[\frac{(1-d_2-\frac{e}{a_2})(1-d_1-\frac{\dot{e}}{a_1})}{4}, \frac{(1+d_2-\frac{e}{a_2})(1+d_1-\frac{\dot{e}}{a_1})}{4} \right] \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{12} &= f_{\tilde{e}_1} \star f_{\tilde{e}_2} = [\underline{f}_{12}, \bar{f}_{12}] \\ &= \left[\frac{(1-d_2-\frac{e}{a_2})(1-d_1+\frac{\dot{e}}{a_1})}{4}, \frac{(1+d_2-\frac{e}{a_2})(1+d_1+\frac{\dot{e}}{a_1})}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.24b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_1} = [\underline{f}_{21}, \bar{f}_{21}] \\ &= \left[\frac{(1-d_2+\frac{e}{a_2})(1-d_1-\frac{\dot{e}}{a_1})}{4}, \frac{(1+d_2+\frac{e}{a_2})(1+d_1-\frac{\dot{e}}{a_1})}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.24c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{22} &= f_{\tilde{e}_2} \star f_{\tilde{e}_3} = [\underline{f}_{22}, \bar{f}_{22}] \\ &= \left[\frac{(1-d_2+\frac{e}{a_2})(1-d_1+\frac{\dot{e}}{a_1})}{4}, \frac{(1+d_2+\frac{e}{a_2})(1+d_1+\frac{\dot{e}}{a_1})}{4} \right] \end{aligned} \quad (3.24d)$$

使用中心集降型方法，得到输出为如下的区间1型集：

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}_{11}u_{11} + \tilde{f}_{12}u_{12} + \tilde{f}_{21}u_{21} + \tilde{f}_{22}u_{22}}{\tilde{f}_{11} + \tilde{f}_{12} + \tilde{f}_{21} + \tilde{f}_{22}} = [u_l, u_r]$$

由于只有4个后验集，它们中心的相对位置与 a_2K_P 和 a_1K_D 相关，只有两种情况。

3.3.1 情况1: $a_2K_P \geq a_1K_D$

由于 $a_2K_P \geq a_1K_D$ ，知 $u_{11} \leq u_{12} \leq 0 \leq u_{21} \leq u_{22}$ ，施加以下限制条件：

$$u_{12} \leq u_l \leq u_r \leq u_{21} \quad (\text{式 } 3.25)$$

可以得到 $L = 2$ ， $R = 2$ 。把 L 和 R 代入到(3.7a)和 (3.7b)中，降型集的边界可以表示为：

$$\begin{aligned} u_l &= \frac{\bar{f}_{11}u_{11} + \bar{f}_{12}u_{12} + \underline{f}_{21}u_{21} + \underline{f}_{22}u_{22}}{\bar{f}_{11} + \bar{f}_{12} + \underline{f}_{21} + \underline{f}_{22}} = \frac{a_2(K_D\dot{e} + K_Pe - a_2d_2K_P - a_2d_1K_P)}{a_2 + a_2d_2d_1 - d_1e} \\ u_r &= \frac{\underline{f}_{11}u_{11} + \underline{f}_{12}u_{12} + \bar{f}_{21}u_{21} + \bar{f}_{22}u_{22}}{\underline{f}_{11} + \underline{f}_{12} + \bar{f}_{21} + \bar{f}_{22}} = \frac{a_2(K_D\dot{e} + K_Pe + a_2d_1K_P + a_2d_2K_P)}{a_2 + a_2d_2d_1 + d_1e} \end{aligned}$$

由此，得到的2型FLC的输出为：

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_l + u_r}{2} \\ &= \frac{a_2^2(1-d_1^2)K_Pe + a_2^2(1+d_2d_1)K_D\dot{e}}{a_2^2(1+d_2d_1)^2 - d_1^2e^2} \\ &= \frac{a_2^2(1-d_1^2)K_P}{a_2^2(1+d_2d_1)^2 - d_1^2e^2}e + \frac{a_2^2(1+d_2d_1)K_D}{a_2^2(1+d_2d_1)^2 - d_1^2e^2}\dot{e} \end{aligned}$$

$$= \theta K_P e + \gamma K_D \dot{e} \quad (\text{式 3.26})$$

其中

$$\theta = \frac{a_2^2(1 - d_1^2)}{a_2^2(1 + d_2 d_1)^2 - d_1^2 e^2} \quad (\text{式 3.27})$$

$$\gamma = \frac{a_2^2(1 + d_2 d_1)}{a_2^2(1 + d_2 d_1)^2 - d_1^2 e^2} \quad (\text{式 3.28})$$

θK_P , γK_D , 分别为等效的比例, 积分增益。与等效PID增益一样, 这类2型模糊PID控制器的 θ 总是比1小, 当 $d_2 \geq d_1$, γ 比1小。

3.3.2 情况2: $a_1 K_D > a_2 K_P$

当 $a_1 K_D > a_2 K_P$ 时,

$$u_{11} < u_{21} < 0 < u_{12} < u_{22} \quad (\text{式 3.29})$$

假定 $u_{21} \leq u_l \leq u_r \leq u_{12}$, 降型集的边界可以重写为:

$$u_l = \frac{\bar{f}_{11}u_{11} + \bar{f}_{21}u_{21} + \underline{f}_{12}u_{12} + \underline{f}_{22}u_{22}}{\bar{f}_{11} + \bar{f}_{21} + \underline{f}_{12} + \underline{f}_{22}} \quad (\text{式 3.30})$$

$$u_r = \frac{\underline{f}_{11}u_{11} + \underline{f}_{21}u_{21} + \bar{f}_{12}u_{12} + \bar{f}_{22}u_{22}}{\underline{f}_{11} + \underline{f}_{21} + \bar{f}_{12} + \bar{f}_{22}} \quad (\text{式 3.31})$$

同理, 可以得到控制器的输出为:

$$u = \theta' K_P e + \gamma' K_D \dot{e} \quad (\text{式 3.32})$$

其中

$$\theta' = \frac{a_1^2(1 + d_2 d_1)}{a_1^2(1 + d_2 d_1)^2 - d_2 \dot{e}^2} \quad (\text{式 3.33})$$

$$\gamma' = \frac{a_1^2(1 - d_2^2)}{a_1^2(1 + d_2 d_1)^2 - d_2 \dot{e}^2} \quad (\text{式 3.34})$$

其中, $\theta' K_P$ 和 $\gamma' K_D$ 分别为等效的比例, 积分增益。可以发现, γ' 比1小, 同时, 当 $d_1 \geq d_2$, θ' 也比1小。

3.3.3 等效增益有效范围

为了得到等效比例、积分的解析解, 加了不等式(3.25)这个限制条件, 下面根据限制条件求取等效增益有效范围。

不等式(3.25)的第一部分表明 $u_{12} \leq u_l$ ，当 $a_2 K_P \geq a_1 K_D$ ，式(3.26)表明 $u_l = \frac{\bar{f}_{11}u_{11} + \bar{f}_{12}u_{12} + \underline{f}_{21}u_{21} + \underline{f}_{22}u_{22}}{\bar{f}_{11} + \bar{f}_{12} + \underline{f}_{21} + \underline{f}_{22}}$ 。因此，

$$\begin{aligned} \frac{\bar{f}_{11}u_{11} + \bar{f}_{12}u_{12} + \underline{f}_{21}u_{21} + \underline{f}_{22}u_{22}}{\bar{f}_{11} + \bar{f}_{12} + \underline{f}_{21} + \underline{f}_{22}} &\geq u_{12} \\ \text{or} \quad \frac{\bar{f}_{11}u_{11} + \underline{f}_{21}u_{21} + \underline{f}_{22}u_{22}}{\bar{f}_{11} + \underline{f}_{21} + \underline{f}_{22}} &\geq u_{12} \end{aligned} \quad (\text{式 3.35})$$

用式(3.21)和式(3.24)替换 u_{ij} 和 f_{ij} ($i, j = 1, 2$)并重新分配，(式3.35)可以重新写作：

$$a_2 K_D \dot{e} + (a_2 K_P + a_1 d_1 K_D - a_2 d_1 K_P)e - a_1 a_2 K_D (1 + d_1 d_2) + a_2^2 K_P (1 - d_1)(1 - d_2) \geq 0 \quad (\text{式 3.36})$$

对 $u_{21} \geq u_r$ 重复上述步骤，可以得到(式3.25)的第2部分，其表达式为：

$$a_2 K_D \dot{e} + (a_2 K_P + a_1 d_1 K_D - a_2 d_1 K_P)e + a_1 a_2 K_D (1 + d_1 d_2) - a_2^2 K_P (1 - d_1)(1 - d_2) \leq 0 \quad (\text{式 3.37})$$

当使用式(3.26)的等效比例积分增益时，式(3.36)，式(3.37)，式(3.23)和式(3.22)就完整的确定 e 和 $\dot{e}$ 的范围。当 $a_1 K_D > a_2 K_P$ [式(3.32)]，其对应的限制条件为：

$$\begin{aligned} a_1 K_P e + (a_1 K_D + a_2 d_2 K_P - a_1 d_2 K_D)\dot{e} - a_1 a_2 K_P (1 + d_1 d_2) + a_1^2 K_D (1 - d_1)(1 - d_2) &\geq 0 \\ a_1 K_P e + (a_1 K_D + a_2 d_2 K_P - a_1 d_2 K_D)\dot{e} + a_1 a_2 K_P (1 + d_1 d_2) - a_1^2 K_D (1 - d_1)(1 - d_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

等效的二型PI增益的推导可参考文献^[46]，IT2 PI FLC控制器对应后验集的中心 $\dot{u} = \theta \dot{e} + \beta e$ ，具体的推导此处不再赘述，只陈述最终的结果，其结果为：

1. 当 $a_1 K_P \geq a_2 K_I$ 时，等效增益系数为：

$$\theta = \frac{a_1^2(1 - d_2^2)}{a_1^2(1 + d_1 d_2)^2 - d_2^2 \dot{e}^2} \quad (\text{3.38a})$$

$$\beta = \frac{a_1^2(1 + d_1 d_2)}{a_1^2(1 + d_1 d_2)^2 - d_2^2 \dot{e}^2} \quad (\text{3.38b})$$

等效增益有效的范围为：

$$a_1 K_I e + (a_1 K_P + a_2 d_2 K_I - a_1 d_2 K_P)\dot{e} - a_1 a_2 K_I (1 + d_1 d_2) + a_1^2 K_P (1 - d_1)(1 - d_2) \geq 0 \quad (\text{式 3.39})$$

$$a_1 K_I e + (a_1 K_P + a_2 d_2 K_I - a_1 d_2 K_P)\dot{e} + a_1 a_2 K_I (1 + d_1 d_2) - a_1^2 K_P (1 - d_1)(1 - d_2) \leq 0 \quad (\text{式 3.40})$$

2. 当 $a_2 K_I > a_1 K_P$ 时，等效增益系数为：

$$\theta' = \frac{a_2^2(1 + d_1 d_2)}{a_2^2(1 + d_1 d_2)^2 - d_1^2 \dot{e}^2} \quad (\text{式 3.41})$$

$$\beta' = \frac{a_2^2(1-d_1^2)}{a_2^2(1+d_1d_2)^2 - d_1e^2} \quad (\text{式 3.42})$$

等效增益的范围为:

$$\begin{aligned} a_2K_P\dot{e} + (a_2K_I + a_1d_1K_P - a_2d_1K_I)e - a_1a_2K_P(1+d_1d_2) + a_2^2K_I(1-d_1)(1-d_2) &\geq 0 \\ a_2K_P\dot{e} + (a_2K_I + a_1d_1K_P - a_2d_1K_I)e + a_1a_2K_P(1+d_1d_2) - a_2^2K_I(1-d_1)(1-d_2) &\leq 0 \end{aligned}$$

3.4 仿真实验分析

通常来说在实际中, PI控制器的控制效果便足够, PD控制器则适合那些大滞后的系统, 例如煤矿的控制, 由于本节的目的为了使输出达到指定的点, 用PI控制器比较合适, 所以这部分将使用等效PI增益作为工具来解释区间二型模糊PI控制器的特性, 首先测试区间2型模糊PI控制器在1阶线性滞后模型上的性能, 然后用非线性系统来检验在线性系统下得到的结论是否正确。

3.4.1 区间2型模糊PI控制器在线性系统上的分析

以简单的1阶线性滞后模型设计区间2型模糊PI控制器, 具体开环表达式为:

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ls} = \frac{2}{15s + 1} e^{-3.5s} \quad (\text{式 3.43})$$

论域 $\dot{e}$ 和 e 都使用2个模糊集。IT2 FSs的形状与图 3-4一样。在本例中, $\dot{e}$ 和 e 的范围都在 $[-1, 1]$ 之间, 所以 $a_2 = a_1 = 1$, 而且简单起见, 本节使 $d_2 = d_1 = d$ 。根据ITAE校准规则^[47], $G(s)$ 的PI参数如下式所示:

$$\dot{u} = 0.586/K \left(\frac{L}{\tau} \right)^{-0.916} \left[\dot{e} + \frac{1.03 - 0.165 \frac{L}{\tau}}{\tau} e \right] = 1.1112\dot{e} + 0.0735e \quad (\text{式 3.44})$$

因此, 可以得出 $K_P = 1.1112$ 和 $K_I = 0.0735$, 根据PI控制器的控制规则, 可以得到对应2型模糊PI控制器后验集的中心。由于 $K_P > K_I$, 等效PI增益由式(3.38)确定, 有效范围则根据式(3.39)和式(3.40), 当 $d = 0.2$ 和 $d = 0.5$, 等效PI增益有效的具体范围见图 3-6。由该图可以知道加入了限制条件后, 等效增益有效的范围进一步缩小。图 3-7显示 θ, β 随着 $\dot{e}$ 是怎样变化的。

图 3-7 表明由FOUs提供的额外自由度导致等效的PI增益不断变化, 不像1型FLC(三角形隶属度函数), 它的输入-输出映射是线性的, 二型模糊PI控制器在每个模糊分区都能实现非线性PI控制器, 等效增益不断随着 $\dot{e}$ 变化。由于 $d_2 = d_1$, θ 和 β 都比1小, 这也导致其等效PI增益比传统的PI参数小。同时也可以观测到, 随着 d 不断变小, θ 和 β 不断变大, 这可以将 θ 和 β 分别求关于 d 的导数得到验证:

$$\frac{\partial \theta}{\partial d} = \frac{-2d[(1+d^2)^2 + 2(1-d^4) - \dot{e}^2]}{[(1+d^2)^2 - d^2\dot{e}^2]^2} \quad (\text{式 3.45})$$

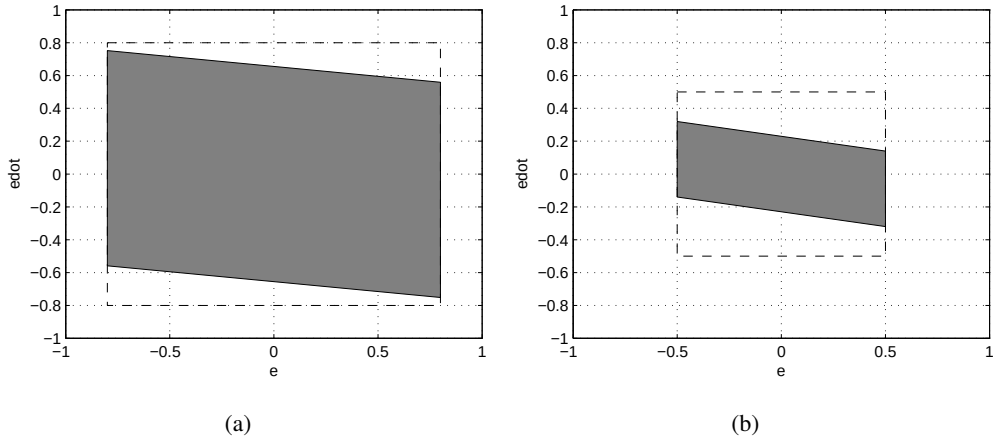


图 3-6 等效增益有效的区域。(a) $d = 0.2$; 和(b) $d = 0.5$.

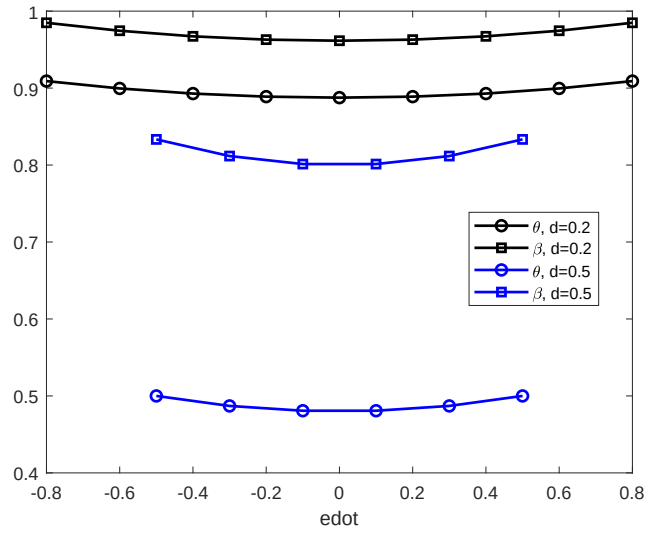


图 3-7 当 $d_2 = d_1 = d$, θ 和 β 与 $\dot{e}$ 之间的关系

$$\frac{\partial \beta}{\partial d} = \frac{-2d[(1+d^2)^2 - \dot{e}^2]}{[(1+d^2)^2 - d^2\dot{e}^2]^2} \quad (\text{式 3.46})$$

由于 $|\dot{e}| \leq 1 - d$ [(3.14)], 所以 $\dot{\theta}$ 和 $\dot{\beta}$ 都小于0, 这意味着, 随着 d 的增加, θ 和 β 也逐渐减小。

用(3.38)除以(3.28)得到:

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{1+d^2}{1-d^2} > 1 \quad (\text{式 3.47})$$

这表明当 d 越来越大的时候，等效积分增益与等效比例增益比值越来越大，从侧面也表明，等效比例增益下降的更快点（参考图 3-7），当 $K_I > K_P$ ，结论则相反。

为了检验所求的等效增益对区间二型PI控制器控制性能的影响，本节比较 $d = 0$ (T1 PI控制器)， $d = 0.2$ 和 $d = 0.5$ ，这三种情况下的IT2 PI控制器的方波响应，见图 3-8。图 3-9则展示了IT2 PI控制器是怎样处理参数不确定的情况。通过改变增益 K 和时间常数 τ 来测试IT2 PI控制器的鲁棒性。表 3.1 是关于不同测试情况下的ITAEs。根据图像以及表格，可以得出以下结论：

- 当系统响应出现震荡时，FOU越大，IT2 FLC消除设定处震荡的能力越强，效果很明显。(图. 3-9(d))
- 当模型的动态响应比较慢时(K 比较小， τ 比较大)，IT2 PI控制器的性能表现不优于1型的。(图. 3-9(a)， 3-9(c)).

为了更好地解释这些特性，在表3.1中增加了依据ITAE校准规则获取的得到比较好的控制效果的PI参数，对比固定PI参数与其他PI参数的比较，当系统响应比较快(对应PI参数比较小)，IT2 FLC的等效增益更接近该系统的PI参数，当系统响应比较慢，IT2 FLC的等效增益则离该系统的PI的参数比较远，所以需要较长的时间调整，不过由于相对更小的等效增益，从侧面反应IT2 FLC能适应更多的情况，而不是像用比较大的PI参数去控制那些响应快的模型，则容易发生震荡。图 3-7，表明FOU 越大 (d 越大)，对应的等效增益越小（例如当 $d = 0.5$ 时， $\theta = 0.5$ ，等效增益比1 小很多），这也解释了在图 3-9(a) 和图 3-9(c) 中，IT2 FLC 调节时间比T1 FLC 更长，同时由于更保守的PI 参数（相对更小的超调量），当系统出现震荡时，IT2 FLC 在设定处越不容易震荡。这些方波响应也同时表明2型($d = 0.2$)和1型模糊PI 控制器之间控制性能差异比较小，这是由于当 d 很小时， θ 和 β 接近于1，2者的PI增益非常接近。

表 3.1 3种控制器在以下5种情况下的ITAEs

	$k = 2, \tau = 15$	$k = 1, \tau = 15$	$k = 3, \tau = 15$	$k = 2, \tau = 30$	$k = 3, \tau = 10$
P	1.1112	2.2224	0.7408	2.0967	0.5510
I	0.0735	0.1469	0.0490	0.0706	0.0497
T1 FLC	61	159	111	250	441
IT2 FLC, $d = 0.2$	59	176	88	291	230
IT2 FLC, $d = 0.5$	164	311	124	579	79

3.4.2 非线性模型分析

这部分将分析2型模糊PI控制器在非线性系统上的控制性能，以第二章介绍的水箱模型为例来说明。与前一个例子相同，都是以 e 和 $\dot{e}$ 为输入，每个论域都有2个模糊集，以 $\dot{u}$ 为输出。用GA来校准参数，获得比较理想的方波响应。首先确定 K_P 和 K_I 的值，然后用GA选取缩放因子(a_1 和 a_2)以及FOU的大小(d_1 和 d_2)来构建2型

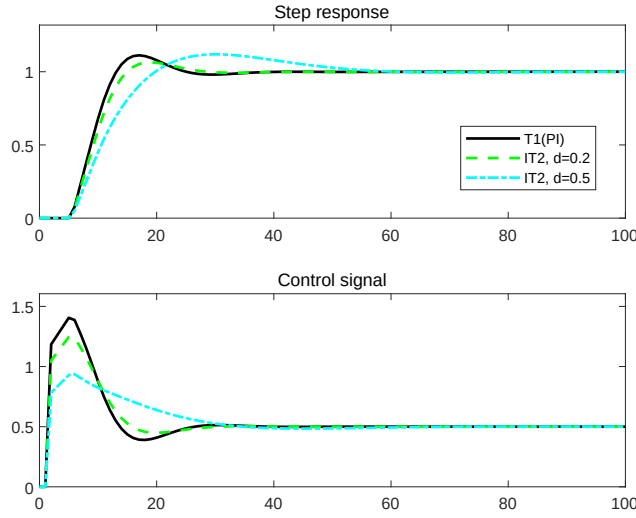


图 3-8 IT2和T1 PI控制器在系统 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{15s+1}e^{-3.5s}$ 上的性能表现.

模糊PI控制器，最终的参数见表 3.2。

表 3.2 用于控制水位的IT2 FLC参数

K_P	K_D	a_2	a_1	d_2	d_1
28.6943	0.1770	5.3145	3.1761	0.3440	0.3255

图. 3-10(a)是参考模型在1型和2型PI控制器下的方波响应。2种类型控制器的效果相当，这是由于1型控制器已经经过优化，进一步改善的空间不大。通过改变模型参数来检验控制器处理不确定性的能力，图 3-10(b)-(d)表明区间2型模糊控制器相对于1型模糊控制器，具有更小的超调量和调整时间，控制效果更好，表面FOU的存在确实是区间2型模糊控制器有更佳的处理不确定性能力。将表 3.2 中的值代入到(3.28) 和(3.38)，可以发现2 型模糊PI 控制器的等效PI增益比1型PI控制器要小。更小的比例增益也与2 型控制器更小的超调量保持一致。除此之外，比例增益比积分增益下降的更快，因为

$$\frac{\beta}{\theta} = \frac{1 + d_2 d_1}{1 - d_1^2} > 1 \quad (\text{式 3.48})$$

由于积分增益的改变相对小一点，所以2者在消除稳态误差所需要的时间差别不大。总之，用等效增益来预测2型控制器的控制性能与实验结果是保持一致的。

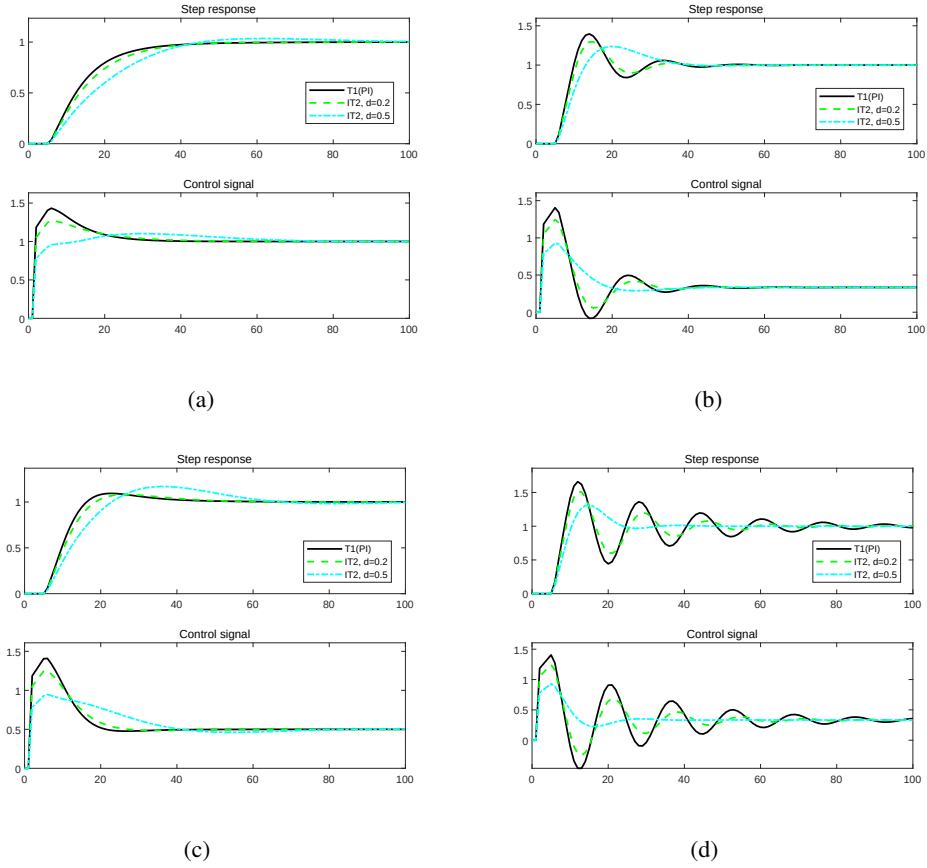


图 3-9 2型PI控制器与1型PI控制器的在不同模型下的性能比较。(a) 静态增益 K 减小至1; (b) K 增加到3; (c) 时间常数 τ , 增加至20; (d) K 增加至3, τ 减小至10.

3.5 本章小结

本章介绍了IT2模糊PID，通过检验等效PID增益，分析了由FOUs提供的额外自由度产生的影响。实验结果也显示IT2模糊PID控制器在每个模糊分区都能实现非线性PID控制器。除此之外，IT2 PID控制器的等效增益比移除FOU的1型FLC小，相对较小的比例增益能够确保更稳定的性能表现，这个发现能够从理论上解释实验结果，即IT2 PI控制器能够更好的消除稳态时产生的震荡。

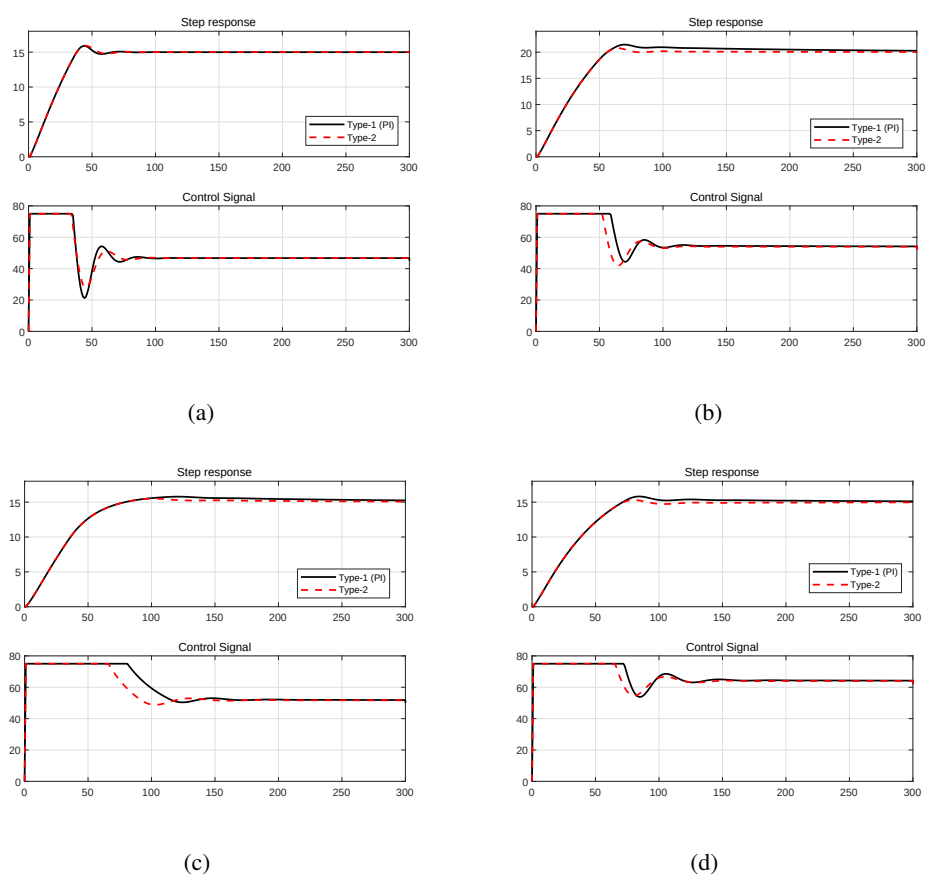


图 3-10 2型与1型模糊PI控制器在双水箱模型下的控制性能比较。(a) 参考模型; (b)改变设定点至20cm; (c) 取 $\theta_1 = 8$; (d) 取 $\theta_2 = 8, \theta_1 = 6, \theta_1 = 7$.

4 二型模糊控制器的理论分析

本节将介绍用 α 平面来表示GT2 FSs的方法，这种表达方式与用 α 切平面表示T1 FSs类似。对于GT2 FSs而言，采用这种表达方式是很合适的，因为对 α 平面相关的计算实际就是对IT2 FSs的一些理论运算，而用 α 平面可以表示一般GT2 FSs，即可以将IT2 FSs的一些理论运算结合到一般GT2 FSs上。

4.1 二型模糊集的 α 平面表示

定义 4.1: 一般二型模糊集 $\bar{A}$ 的 α 平面 $\tilde{A}_\alpha$ ，是所有主隶属度的次隶属度大于等于 α 的集合，数学定义为：

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\alpha &= \{(x, u), u_{\bar{A}}(x, u) \geq \alpha | \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\} \\ &= \int_{\forall x \in X} \int_{\forall u \in J_x} \{(x, u) | f_x(u) \geq \alpha\}\end{aligned}\quad (\text{式 4.1})$$

很明显，IT2 FSs的FOU就是一个特殊的 α 平面(当 $\alpha = 0$)。与一维空间的 α 切片相比， α 平面是2维的，以 x 为水平轴，以主隶属度为垂直轴，如图. 4-1所示，也就是 (x, u) 平面的阴影部分，可以理解为在 $u_{\bar{A}} = \alpha$ 平面上面部分的T2 FSs在这个平面的投影。

定义 4.2: 与 α 平面 $\tilde{A}_\alpha$ 相关的GT2 FSs $\tilde{A}(\alpha)$ ，定义为：

$$\tilde{A}(\alpha) = \{(x, u), \alpha | \forall (x, u) \in \tilde{A}_\alpha\} \quad (\text{式 4.2})$$

定理 4.1: GT2 FSs可以用它的相关T2 FSs的并集表示，例如：

$$\tilde{A}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} \tilde{A}(\alpha) \quad (\text{式 4.3})$$

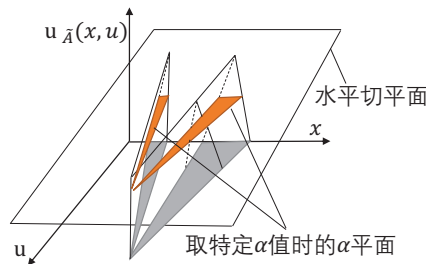


图 4-1 α 平面

定理 4.1 的证明可以参见文献^[9]，该定理表明 GT2 FSs 的运算可以直接利用 IT2 FSs 的相关计算，因为 $\tilde{A}(\alpha)$ 与特定 α 的 IT2 FS 相关，而这个 IT2 FS 的 FOU 则与 $\tilde{A}_\alpha$ 一样，见图 4-1 的阴影部分。

GT2 FSs 的中心对于模糊集而言是一个非常重要的概念，通常可以简单理解为所有内嵌式 GT2 FSs 中心的并集，如式 4.4 所示

$$C_{\tilde{A}}(x) = \int_{\forall \theta_1 \in J_{x_1}} \cdots \int_{\forall \theta_N \in J_{x_N}} \min(f_{x_1}(\theta_1), \dots, f_{x_N}(\theta_N)) / \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \quad (\text{式 4.4})$$

也可以表示为:

$$C_{\tilde{A}}(x) = \{(\varsigma_k, (\min\{f_{x_i}(\theta_i), i = 1, \dots, N\})_k)\}_{k=1}^{\prod_{i=1}^N M_i} \quad (\text{式 4.5})$$

$$\varsigma_k = \left(\frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i} \right)_k \quad (\text{式 4.6})$$

根据这个公式计算 GT2 FSs 的中心是不切实际的，因为它需要计算 $\prod_{i=1}^N M_i$ 个数目的中心，通常这个数目是非常大，所以要计算一般 GT2 FSs 的中心并不能根据这个公式计算。在先前已经提到计算 IT2 FSs 的中心，可以使用 KM 算法，文献^[9]已经证明 $C_{\tilde{A}}(x)$ 可以用 α 平面将 GT2 FSs 分解成各个与 α 相关的 IT2 FSs 来计算，即:

$$C_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha / C_{\tilde{A}_\alpha}(x) \quad (\text{式 4.7})$$

其中 $C_{\tilde{A}_\alpha}(x)$ 是 α 平面 $\tilde{A}_\alpha$ 的中心，那么根据式 (4.7)，可以将 $\tilde{A}$ 拆分成很多 $\tilde{A}_\alpha$ ，而 $\tilde{A}_\alpha$ 可以根据 IT2 FSs 的计算方法求取重心，然后求并集。因此，可以得到计算 $C_{\tilde{A}}(x)$ 包括一下几步:

1. 选择合适数目的 α 平面，其中 $\alpha \in [0,1]$ (假设以等间距 Δ 选取)，即 α 分别取 $0, 1/\Delta, 2/\Delta, \dots, 1$ 。对于每个 α 计算出对应的 $\tilde{A}_\alpha$ 。
2. 根据步骤 1 求取的所有 $\tilde{A}_\alpha$ ，使用 KM 算法计算出对应的 $C_{\tilde{A}_\alpha}(x)$ 。
3. 根据 4.7 求取中心 $C_{\tilde{A}}(x)$

下面以具体实例来说明具体计算。假设 FOU 由高斯函数确定，例如:

$$\begin{aligned} UMF_{FOU(\tilde{A})} &= \max\left\{\exp\left[-\frac{(x-3)^2}{8}\right], 0.8\exp\left[-\frac{(x-6)^2}{8}\right]\right\} \\ LMF_{FOU(\tilde{A})} &= \max\left\{0.5\exp\left[-\frac{(x-3)^2}{2}\right], 0.4\exp\left[-\frac{(x-6)^2}{2}\right]\right\} \end{aligned}$$

次级隶属函数则选取三角型，其峰值由 $w(x) \in [0,1]$ 确定，形式为:

$$\mathbf{Apex} = \underline{x} + w(x)(\bar{u}(x) - \underline{u}(x)) \quad (\text{式 4.8})$$

图 4-2 描述了本节使用的 FOUs、在特定 x 值下的次级隶属函数以及根据上述步骤计算出的 T2 FS $\tilde{A}$ 的中心。从 4-2(c) 可以看到对于不同的 w ，对应的 $C_{\tilde{A}}(x)$ 近似于一个

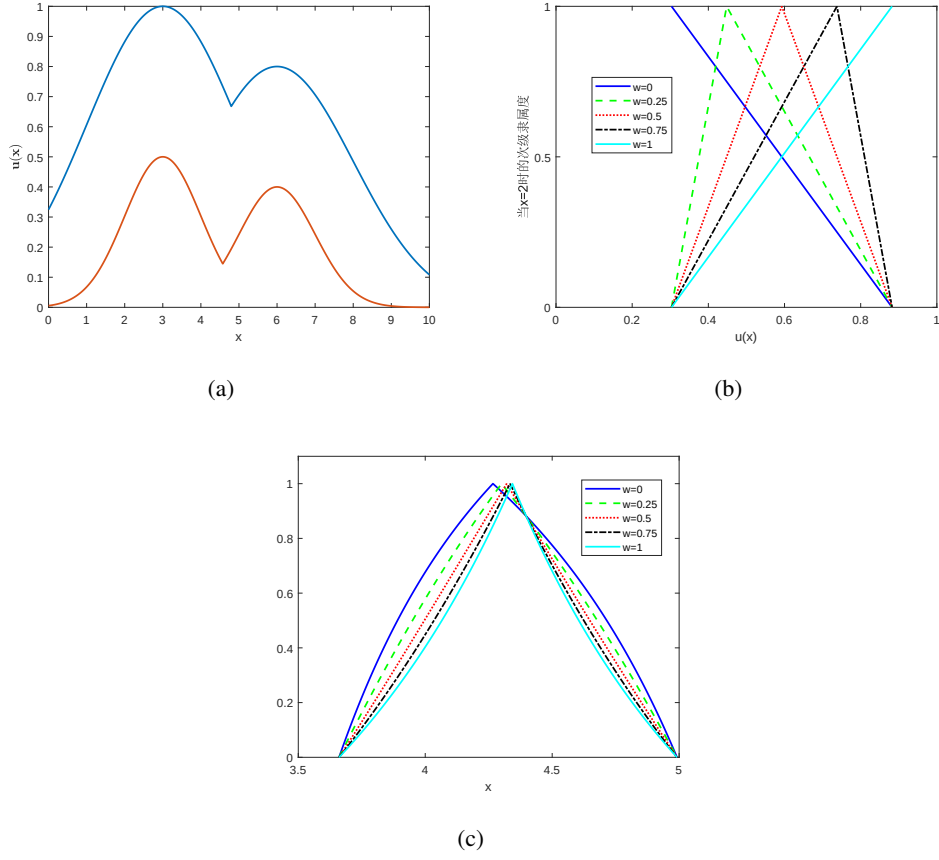


图 4-2 (a)选取的FOU; (b)当 $x=2$, 取不同 w 时的次级隶属度函数; (c) 当 $w = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ 时, $C_{\tilde{A}}(x)$ 的值。

三角形, 那么可以猜想对于T2 FLSs的中心, 可以依据 $C_{\tilde{A}_{\alpha=0}}(x)$ 以及 $C_{\tilde{A}_{\alpha=1}}(x)$ (三角形的三个顶点) 来计算, 规定为 $\hat{C}_{\tilde{A}}(x)$, 表格4.1也给出相应的具体数据, $C_{\tilde{A}_{\alpha=1}}(x)$ 为类似三角形的 $C_{\tilde{A}}(x)$ 的顶点, $m(C_{\tilde{A}}(x))$ 为 $C_{\tilde{A}}(x)$ 的中心 (可以当T1 FLSs处理, 用重心法求解), 当 $\alpha = 0$ 时, $C_{\tilde{A}_{\alpha=0}}(x) = [3.6605, 4.9917]$, 这两个端点为三角形的底部端点, $m(\hat{C}_{\tilde{A}}(x))$ 则为以 $C_{\tilde{A}_{\alpha=1}}(x)$, $C_{\tilde{A}_{\alpha=0}}(x)$ 这三个点求出的近似中心, 对比表4.1中的第4与第6列, 可以看到这种计算T2 FLSs 中心的方法, 其误差已经很小了, 基本上优于只用 $\alpha = 0$ 的结果, 也就是说在计算T2 FLSs 的中心时, 只需要考虑2个 α -平面: $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$, 就能得到非常好的近似结果, 依据此, 下节将介绍一种新型的T2 FLS-近似二型模糊逻辑系统 (QT2 FLS), 当然如果需要更高的精度, 可以考虑更多不同取值的 α -平面。

4.2 三角形QT2 FLS

根据上节的观察, 文献^[48]提出QT2 FLS, 见图 4-3。这种FLS 将T1 FLS 与IT2

FLS 结合起来，以T1 FLS的去模糊化输出作为三角形顶点，以IT2 FLS的去模糊化输出作为底部，即Q-T2 FLS 的去模糊化输出为：

$$y(\mathbf{x}) = \frac{1}{3}[y_L(\mathbf{x}|\alpha = 0) + y_R(\mathbf{x}|\alpha = 0) + y^1(\mathbf{x}|\alpha = 1)] \quad (\text{式 4.9})$$

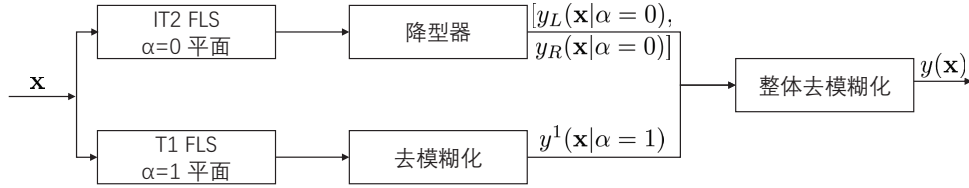


图 4-3 三角形Q-T2 FLS

表 4.1 不同w值时的 $C_{\tilde{A}_{\alpha=1}}(x)$, $m(C_{\tilde{A}}(x))$, $m(\hat{C}_{\tilde{A}}(x))$

	$C_{\tilde{A}_{\alpha=1}}(x)$	$m(C_{\tilde{A}}(x))$	$m(C_{\tilde{A}_{\alpha=0}}(x)) - m(C_{\tilde{A}}(x))$	$m(\hat{C}_{\tilde{A}}(x))$	$m(\hat{C}_{\tilde{A}}(x)) - m(C_{\tilde{A}}(x))$
w=0	4.3216	4.3848	0.0304(0.694%)	4.3840	-0.0008(-0.017%)
w=0.25	4.3712	4.3979	0.0172(0.392%)	4.4005	0.0026(0.059%)
w=0.5	4.3952	4.4059	0.0093(0.210%)	4.4085	0.0026(0.059%)
w=0.75	4.4094	4.4115	0.0037(0.084%)	4.4133	0.0018(0.040%)
w=1	4.4188	4.4157	-0.0005(-0.011%)	4.4164	0.0007(0.016%)

这种新型的T2 FLS有机的将IT2 FLSs与T1 FLS结合起来，由于没有涉及T2 FS，计算起来没有广义T2 FLSs复杂，又能很好的逼近GT2 FSs的中心，同时又比IT2 FLS有更多的设计自由度，所以可以推断：相对与IT2 FLS，Q-T2 FLSs 可能有更好的性能表现。

4.2.1 QT2 FLSs的理论分析与推广

对于三角形隶属函数的T1 FLS而言，它本身就是一个固定参数的PID控制器，也就是说T1 FLC的输出 u_1 为：

$$\dot{u}_1 = K_p \dot{e} + K_I e + K_D \ddot{e} \quad (\text{式 4.10})$$

由于QT2 FLS中的T1 FLS是依据FOU构建的，在本章中我们使式（4.8）来构建次级隶属函数，由此知T1 FLS 中 $\dot{e}$ 等效增益的有效区域为 $[-1 + d_1, 1 - d_1]$ ， e 的有效区域为 $[-1 + d_2, 1 - d_2]$ ， $\ddot{e}$ 的有效区域为 $[-1 + d_3, 1 - d_3]$ ，由于后验集的中心已经确定(见式（3.3）)，我们可以得出QT2 FLC中T1 FLC 的目标值在有效范围内为：

$$f_{\tilde{e}_1} = \frac{2w_1 d_1 + 1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1}}{2}, f_{\tilde{e}_2} = \frac{2w_1 d_1 + 1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} \quad (4.11a)$$

$$f_{\tilde{e}_1} = \frac{2w_2d_2 + 1 - d_2 - \frac{\dot{e}}{a_2}}{2}, f_{\tilde{e}_2} = \frac{2w_2d_1 + 1 - d_2 + \frac{\dot{e}}{a_2}}{2} \quad (4.11b)$$

$$f_{\tilde{\ddot{e}}_1} = \frac{2w_3d_3 + 1 - d_3 - \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2}, f_{\tilde{\ddot{e}}_2} = \frac{2w_3d_3 + 1 - d_3 + \frac{\ddot{e}}{a_3}}{2} \quad (4.11c)$$

其中 w_1, w_2, w_3 分别为模糊集 $\dot{e}, e, \ddot{e}$ 用来构建次级隶属函数的权重值, 根据对应的控制规则, 得到相关的目标值以及去模糊化后得到T1 FLC的输出为:

$$\dot{u}_1 = \frac{1}{(2w_1 - 1)d_1 + 1}K_P\dot{e} + \frac{1}{(2w_2 - 1)d_2 + 1}K_Ie + \frac{1}{(2w_3 - 1)d_3 + 1}K_D\ddot{e} \quad (式 4.12)$$

结合IT2 FLC 等效增益的有效范围(在T1 FLC的有效范围加上限制条件的范围), 只要IT2 FLC满足条件, T1 FLC便满足。根据式(4.9), 我们可以得到QT2 FLC的输出 $\dot{u}$ 为:

$$\dot{u} = \frac{2}{3}\dot{u}_2 + \frac{1}{3}\dot{u}_1 = \theta K_P\dot{e} + \beta K_Ie + \gamma K_D\ddot{e} \quad (式 4.13)$$

其中:

$$\theta = \frac{2}{3}\theta_1 + \frac{1}{3[(2w_1 - 1)d_1 + 1]} \quad (4.14a)$$

$$\beta = \frac{2}{3}\beta_1 + \frac{1}{3[(2w_2 - 1)d_2 + 1]} \quad (4.14b)$$

$$\gamma = \frac{2}{3}\gamma_1 + \frac{1}{3[(2w_3 - 1)d_3 + 1]} \quad (4.14c)$$

$\theta_1, \beta_1, \gamma_1$ 分别为IT2 FLC的等效增益系数, 当 $w_1 \geq 0.5, w_2 \geq 0.5, w_3 \geq 0.5$, θ 比1小, 与此同时当 $d_1 \geq d_2$ 时, β 比1小, 当 $d_1 \geq d_3$ 时, γ 也比1小; 当 $w_1 < 0.5, w_2 < 0.5, w_3 < 0.5$ 时, θ, β, γ 与1之间的关系无法确定。也就是说这赋予QT2 FLC控制器一定的自由度选择 w 的值来控制 θ, β, γ 的大小来获取更好的性能。

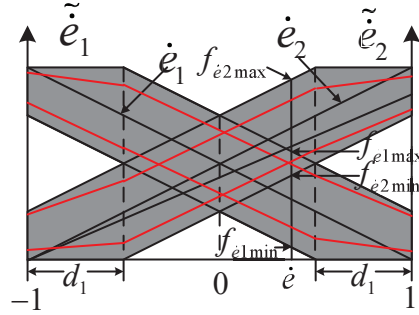
接下来分析GT2 FLS, 以 $\dot{e}$ 为例说明, 如图.4-4所示, 图中红线部分构成的区域为我们构建的特定 α 值的IT2 FSSs(由 w 以及 α 的取值决定), $\dot{e}$ 依旧满足 3.23, 由于PID控制器表达式过于复杂, 本文以PI 控制器为例说明 (PD控制器可以根据PI的结果类推), 后验集的中心与 $\alpha = 0$ 这个平面构成的FOU 一样, 那么我们可以得到相关的目标值为:

$$f_{\tilde{e}_1} = [f_{\dot{e}_{1min}}, f_{\dot{e}_{1max}}] = \left[\frac{1 - d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} + w_1d_1\alpha, \frac{1 + d_1 - \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} + (w_1 - 1)d_1\alpha \right] \quad (4.15a)$$

$$f_{\tilde{e}_2} = [f_{\dot{e}_{2min}}, f_{\dot{e}_{2max}}] = \left[\frac{1 - d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} + w_1d_1\alpha, \frac{1 + d_1 + \frac{\dot{e}}{a_1}}{2} + (w_1 - 1)d_1\alpha \right] \quad (4.15b)$$

$$f_{\tilde{e}_1} = [f_{e_{1min}}, f_{e_{1max}}] = \left[\frac{1 - d_2 - \frac{e}{a_2}}{2} + w_2d_2\alpha, \frac{1 + d_2 - \frac{e}{a_2}}{2} + (w_2 - 1)d_2\alpha \right] \quad (4.15c)$$

$$f_{\tilde{e}_2} = [f_{e_{2min}}, f_{e_{2max}}] = \left[\frac{1 - d_2 + \frac{e}{a_2}}{2} + w_2d_2\alpha, \frac{1 + d_2 + \frac{e}{a_2}}{2} + (w_2 - 1)d_2\alpha \right] \quad (4.15d)$$


 图 4-4 取特定 α 值时IT2 FSs的示例

求这种特定 α 平面的输出与前面介绍的方法一样，由于依据 α 平面构建的IT2 FLC的后验集的中心与第三章的后验集中心是一样的，所以，中心之间的大小关系也只有两种，本文考虑 $a_1 K_P \geq a_2 K_I$ 的情况，可以得到最终的输出为：

$$\dot{u} = \frac{[(2w_1 - 1)\alpha d_1 + 1]a_1^2(2\alpha w_2 d_2 - d_2 + 1)[(1 + 2\alpha w_2 - 2\alpha)d_2 + 1]}{a_1^2 x^2 - (1 - \alpha)d_2^2 \dot{e}^2} K_P \dot{e} \quad (\text{式 4.16})$$

$$+ \frac{[(2w_1 - 1)\alpha d_1 + 1]a_1^2 x}{a_1^2 x^2 - (1 - \alpha)d_2^2 \dot{e}^2} K_I e$$

$$= \theta K_P \dot{e} + \beta K_I e \quad (\text{式 4.17})$$

由此可以求出取不同 α ($\alpha \in [0, 1]$) 值时对应的等效PI增益：

$$\theta = \frac{[(2w_1 - 1)\alpha d_1 + 1]a_1^2(2\alpha w_2 d_2 - d_2 + 1)[(1 + 2\alpha w_2 - 2\alpha)d_2 + 1]}{a_1^2 x^2 - (1 - \alpha)d_2^2 \dot{e}^2} \quad (4.18a)$$

$$\beta = \frac{[(2w_1 - 1)\alpha d_1 + 1]a_1^2 x}{a_1^2 x^2 - (1 - \alpha)d_2^2 \dot{e}^2} \quad (4.18b)$$

$$x = 2\alpha^2 d_1 d_2 (2w_1 w_2 - w_1 - w_2) \quad (4.18c)$$

$$+ \alpha(2w_1 d_1 + 2w_2 d_2 - 2d_1 d_2 - d_1 d_2) + d_1 d_2 + 1$$

将 $\alpha = 1$ ($x = (2w_1 d_1 - d_1 + 1)(2w_2 d_2 - d_2 + 1)$) 和 $\alpha = 0$ ($x = 1 + d_1 d_2$) 代入式 (4.18) 可以得到与式(4.12)和(3.28) 相同的结果。由此，我们得到最终的GT2 PI FLC的输出为：

$$\dot{u} = \sum_{i=1}^n w_i \theta_i K_P \dot{e} + \sum_{i=1}^n w_i \beta_i K_I e \quad (\text{式 4.19})$$

其中 n 表示 α 平面的个数， w_i 表示第 i 个 α 平面构成的PI控制器的权值， θ_i ， β_i 分别对应该控制器的等效PI增益，从这个表达式可以看出，除了在不同模糊分区等效增益是变化的，还将各个 α 平面的等效增益进行相关的线性组合，使GT2 FLS有更强的非线性拟合能力，同时有更高的设计自由度，具有更强的性能表现。

4.3 仿真实验

仿真实验与第三章的实验设置一样，分为线性模型与非线性模型。由于不同 w 的取值影响QT2 FLC的等效增益，所以文中比较 $w_1 = w_2 = \{0, 1\}$ （分别对应LMF与UMF）这两种极端情况下的性能表现。在线性模型下，测试了4种模型，根据图.4-6, 和表.4.2, 可以得出以下结论:

- QT2 FLC与IT2 FLC类似，当系统出现震荡，FOU越大，消除稳定点震荡的问题能力越强。(图 4-6(d))
- w 值的选取影响QT2 FLC的控制性能，使QT2 FLC兼具T1 FLC与IT2 FLC的性质，既能处理震荡的问题也能解决响应较慢的问题（图 4-6(c), 4-6(d)）。

表 4.2 7种控制器在以下5种情况下的ITAEs

	$k = 2, \tau = 15$	$k = 1, \tau = 15$	$k = 3, \tau = 15$	$k = 2, \tau = 30$	$k = 3, \tau = 10$
T1 FLC	61	159	111	250	441
IT2 FLC, $d = 0.2$	59	176	88	290	230
IT2 FLC, $d = 0.5$	164	311	124	579	79
QT2 FLC, $d = 0.2, w = 0$	75	190	108	229	444
QT2 FLC, $d = 0.5, w = 0$	120	253	104	226	368
QT2 FLC, $d = 0.2, w = 1$	60	195	83	294	203
QT2 FLC, $d = 0.5, w = 1$	122	305	88	492	71

根据图.4-5可以解释 w 值对QT2 FLC性能的影响， $w = 0$ 时，QT2 FLC的等效增益接近于1 或者比1大，当 $w = 1$ 时，QT2 FLC的等效增益都比1小，与前面解释IT2 FLC性质的原因一样，越保守的增益能够确保控制器越不容易发生震荡，不过越大的等效增益能够使QT2 FLC处理延时比较大的系统时，性能表现比IT2 FLC控制器更好（见图 4-6(c)），因此，根据不同的模型要求，来优化QT2 FLC，选取最佳的QT2 FLC。

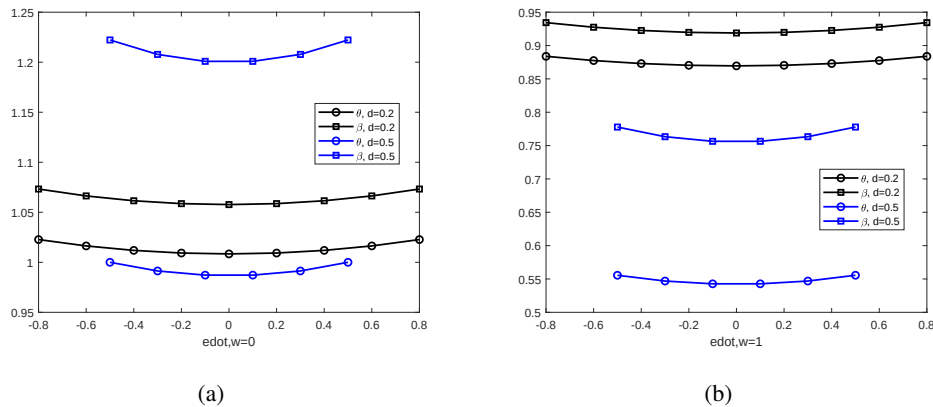


图 4-5 当 $d_1 = d_2 = d$ ，取不同 w 值时， θ 和 β 与 $\dot{w}$ 之间的关系。(a) $w = 0$; (b) $w = 1$.

同样的，也需要比较3种控制器在非线性模型下的性能表现，采用的仍然是水箱模型。表 4.3是用GA优化后的QT2 FLC参数，图.4-7描述的是在非线性模型-双水箱

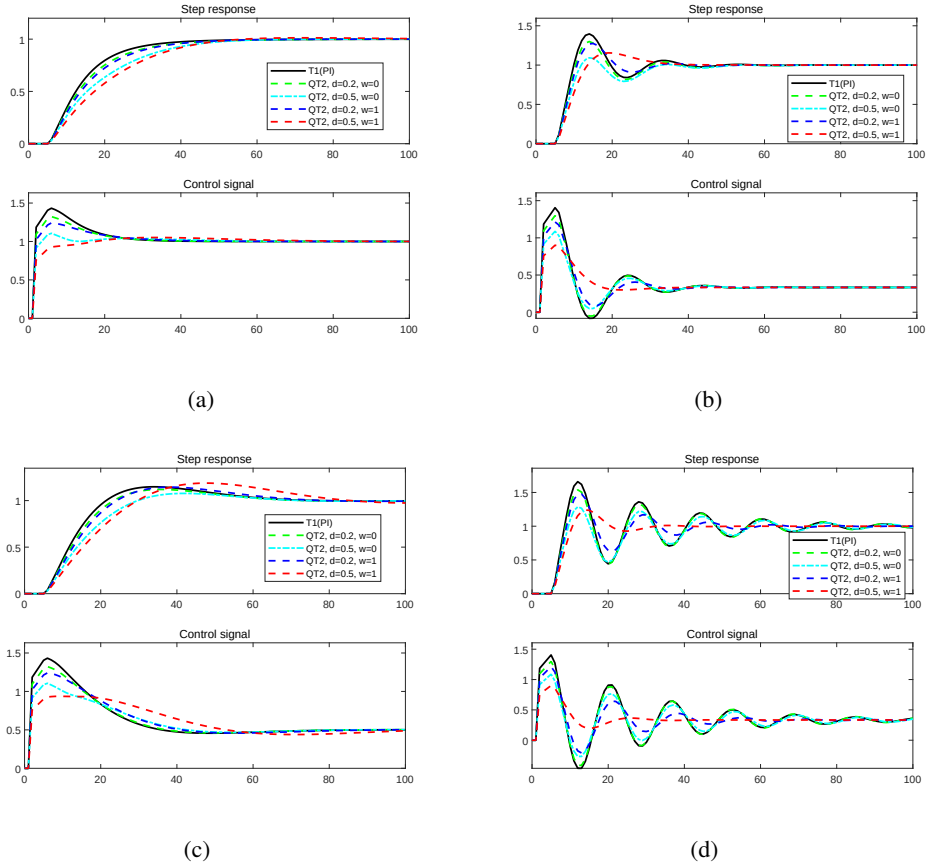


图 4-6 QT2 PI控制器与1型PI控制器的在不同模型下的性能比较。(a) 静态增益 K 减小到1; (b) K 增加至3; (c) 时间常数 τ , 增加至30; (d) K 增加至3, τ 减小至10.

表 4.3 用于控制水位的QT2 FLC参数

K_P	K_I	a_1	a_2	d_1	d_2	w_1	w_2
28.6943	0.1770	17	5	0.2	0.01	0.5	0.3

模型下的控制性能比较, 从图中可以发现, QT2 FLC控制器的控制性能略微好于IT2 FLC 而且QT2 FLC 中的 d_1, d_2 非常小(分别为0.2, 0.01)基本上等同于T1 FLC, 不过仍然可以处理参数不确定的情况。

4.4 本章小结

本章介绍了 α 平面的相关知识, 并用 α 平面表示T2 FSs, 将IT2 FSs的相关运算结合到GT2 FSs中, 基于此, 对新型的QT2 FLC做了相应的理论推广, 理论分析表明在

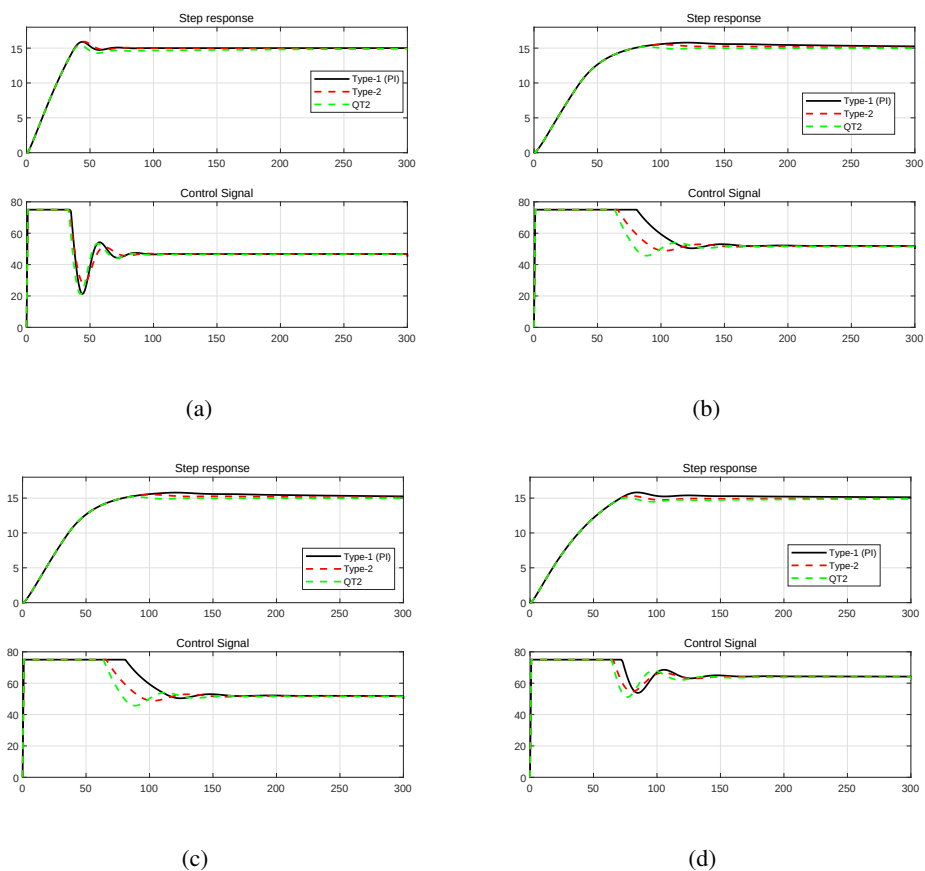


图 4-7 三种模糊PI控制器在双水箱模型下的控制性能比较。(a) 参考模型; (b)改变设定点至20cm; (c) 取 $\alpha_3 = 6$; (d) 取 $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4$ 。

等效增益的有效范围内， w 的取值影响QT2 FLC 的等效增益的大小，在某些情况下可以处理延时比较大的模型， w 的选取，可以给QT2 FLC 提供更大的设计自由度去处理不同情况下的模型。仿真实验也验证理论分析的正确性。

5 三种控制器控制性能的比较

传统的康复机器人大多采用电机驱动，而这种驱动方式对患者是很不友好的，缺乏柔韧性以及安全性，而气动肌肉则由外部的空气压缩机提供动力驱动，作推拉运动，有着与人体骨骼肌相似的特性。由于气动肌肉是由外层纤维编织网和内层橡胶管构成，具有很高的柔韧性，以及价格便宜。同时内层橡胶管具有很好的弹性，可提供很大的输出，而重量却比较小，即输出力/质量的比值大，且会在达到推拉极限时自动制动，不会突破预定的范围。同时，气动肌肉是一种柔性驱动器，其独有的柔顺性使得其特别适用于驱动与人密切接触的康复机器人。然而，由于气动肌肉由气压驱动，因此具有非线性、迟滞性、参数时变等特性，对机理模型的参数辨识与运动控制都带来了较大的困难，是比较T1、IT2、QT2 FLCs这三种控制器的鲁棒性的理想测试模型。

5.1 仿真实验

5.1.1 实验模型

本节比较3种控制器的控制效果采用的是单气动肌肉模型，如图5-1所示。其基本工作原理为：空压机提供压缩空气；NI-PCI 板卡采集力、位移传感器数据发送到工控机；工控机下载工作站上控制算法的二进制源码，并将计算的控制信号通过NI-PCI 板卡发送到电磁比例阀；电磁比例阀进而调节气动肌肉的输入气压，改变气动肌肉的伸缩。

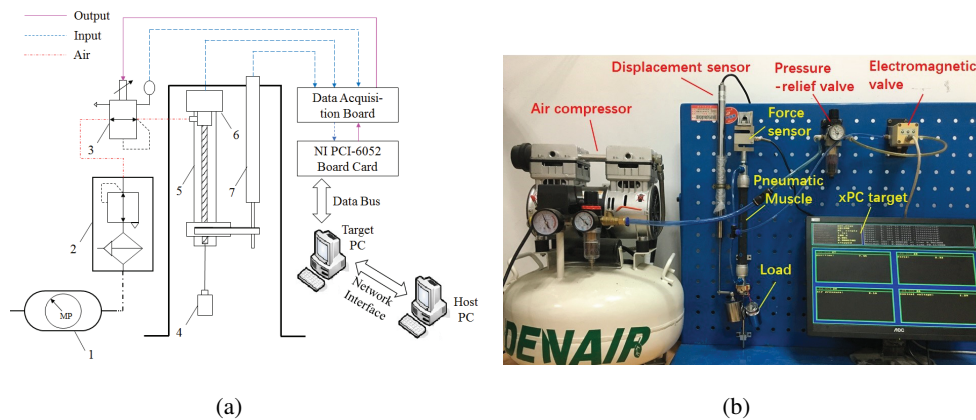


图 5-1 (a)气动肌肉系统实验平台原理框图(1-空压机，2-泄压阀，3-电磁比例阀，4-砝码，5-气动肌肉，6-力传感器，7-位移传感器)；和(b) 气动肌肉实物模型。

气动肌肉模型的具体动力学方程可以定义为:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + B(P)\dot{x} + K(P)x &= F(P) - Mg \\ F(P) &= F_0 + F_1P \\ K(P) &= K_0 + K_1P \\ B(P) &= B_0 + B_1P \end{aligned} \quad (\text{式 5.1})$$

其中 M 为负载质量, g 为重力加速度, x 为气动肌肉轴向收缩长度。规定 $x = 0$ 为气动肌肉在标压下(完全放气状态)的初始位置, P 为气动肌肉的输入压强。 $K(P)$ 与 $B(P)$ 分别为弹性系数与阻尼系数。 $F(P)$ 为收缩元产生的有效力。 $B(P)$ 除了与 P 有关, 还取决于PM的放气状态。实验基于三元素模型理论建立的气动肌肉动态特性数学模型为:

$$\begin{aligned} F(P) &= F_0 + F_1P = 0.072P - 202.32 \\ K(P) &= K_0 + K_1P = \begin{cases} K_{m1}P + K_{m0} & 0 < P \leq 325420Pa \\ K_{n1}P + K_{n0} & P > 325420Pa \end{cases} = \begin{cases} -0.0105P + 90638 & 0 < P \leq 325420Pa \\ 0.0105P + 18063 & P > 325420Pa \end{cases} \\ B(P) &= B_0 + B_1P = \begin{cases} B_{0i} + B_{1i}P & \text{(inflation)} \\ B_{0d} + B_{1d}P & \text{(deflation)} \end{cases} = \begin{cases} 0.00022685P + 2435.3 & \text{(inflation)} \\ 0.0032P + 2522 & \text{(deflation)} \end{cases} \end{aligned}$$

从相应的数学模型可以知道气动肌肉对于不同的压强范围具有不同的非线性, 但是对比实际气动肌肉控制平台, 这样的模型仍然不精确, 因此很适合比较控制器的鲁棒性。与第二章实验部分类似, 所有的控制器都以反馈误差 $e = x_d - x$ (x_d 为期望输出, x 为实际输出), 误差的变化率 $\dot{e}$ 作为输入, 以控制信号 p 的变化率 $\dot{p}$ 作为输出。隶属度函数采用高斯型, 为了减少自由度的影响, 对于T1 FLC 而言, 将每个变量的论域划分为5 部分, 即总共有10个MFs, 需要优化的参数为 $2 \times 10 + 9 = 29$ 个, 其它两种则每种取6 个MFs, 因此一个IT2 FLC需要优化的参数总共为 $3 \times 6 + 5 = 23$ 个。而QT2 FLC还需要优化 w 用于确定对应的T1 FLC, 而1个模糊集需要一个对应的 w , 因此还需要额外优化6个参数为, 总的参数为: $23 + 6 = 29$, 这样使得3种控制器的参数接近。

5.1.2 方波实验

在仿真实验中, 取 $M = 1$, $g = 9.8m/s^2$, 设定点取 $x_d = 0.024$ 作为标准模型进行优化, 步长则取0.0001s。为了使结果更具有可靠性, 排除偶然性, 本节将实验重复10次, 统计每次实验的ITAE, 10次实验的ITAE见图 5-2(a), 从图中可以看出在这种情况下, 3种控制器差别不大, QT2控制器效果相对而言, 性能表现更好点, 无论是箱型图中值 (见红线) 还是其底部都是最小的。图 5-2(b)是选取三种控制器

中ITAE相接近的参数得到的实际输出曲线，可以观测到在这种情况下3者基本是没有差别的。通过改变不同的参数来测试控制器的鲁棒性，例如在某个时刻改变设定点，考虑系统的信号扰动（对输入信号加入一个信噪比为20的白噪声），或改变气动肌肉的负载，可以得到图 5-3。从图 5-3(a)和图 5-3(b)中可以看出QT2和IT2这两种控制器在处理外部扰动或者改变设定点上相对于T1控制器而言，具有更强的性能表现，更小的调整时间以及更小偏离值，而改变负载，对这三种控制器的影响都不大，整体来看，QT2 与IT2 这两种控制器在不同情况下性能表现都很接近。这也很好解释，虽然QT2增加了自由度，本质上是IT2与T1的结合，起主导作用的还是IT2，而且经过优化后，在仿真模型上，性能提升不会太大，如果需要进一步比较控制器的鲁棒性还需在实物上进一步测试。

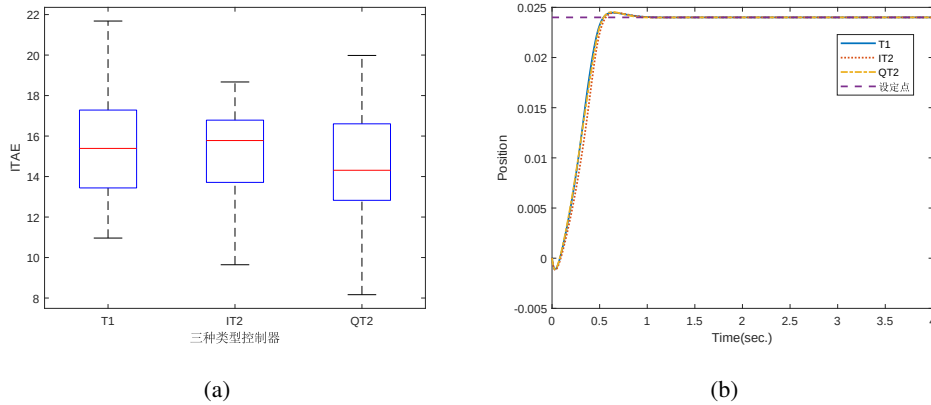


图 5-2 (a) 3种控制器训练模型的箱型图；(b) 3种控制器的性能表现.

5.2 本章小结

气动肌肉由于具有非线性、迟滞性、参数时变等特性，比较适合比较不同控制器的控制性能，相关的仿真研究也表明，在经过遗传算法优化后，三种控制器在训练模型上都能取得很接近的控制性能，在加入外部干扰或者改变输入信号，QT2与IT2这两种控制器控制性能相对来说更好，具有更强的鲁棒性。由于只是在仿真模型上测试，针对实际更复杂的情况，还需进一步测试。

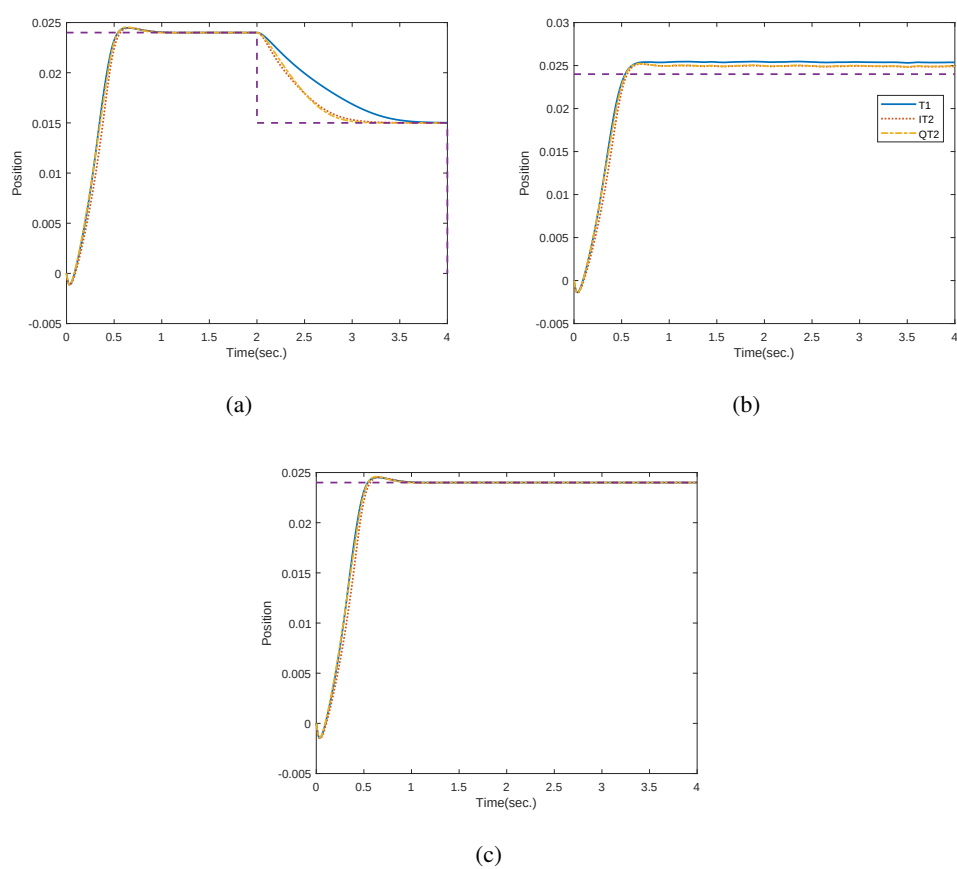


图 5-3 3种不同情况下的性能比较。(a) 设定点由0.024降为0.015; (b) 加入干扰信号. (c) 负载 m 由1增加至5

6 结论

6.1 全文总结

二型模糊集是目前模糊领域中比较前沿的研究领域。虽然，一型模糊集的相关理论已经很成熟，并且在很多实际问题中也得到相关的应用，但是受限于一型模糊集的局限性，描述不确定性的能力有限，在描述更复杂的非线性模型以及很难精确建模的实物上，性能表现有限。因此，需要发展二型模糊集的相关理论来解决这个问题。

但是由于二型模糊集相关的计算以及理解使用起来比较困难，应用比较广泛的是区间二型模糊集，而且目前对二型模糊集的相关的理论研究落后于实际，理论部分并不十分完善。本文主要研究二型模糊集在自动控制方面的应用，并从理论部分解释二型模糊PID控制器性能更优的原因，并与一型模糊控制器做相关的仿真实验对比。主要的内容包括以下部分：

1. 针对区间二型模糊集降型操作复杂度比较高的问题，总结前人提出的比较高效的降型算法，基于双水箱模糊比较这些算法的控制性能，并基于在实际中跟据先验知识设计隶属函数，以及控制规则的确定比较困难，使用遗传算法进行相关的参数优化。
2. 借鉴于T1 PID FLC控制器的设计方法，进行相关的数学推导以及理论分析。在特定的有效模糊区间，得出相关的IT2 PID FLC 的等效增益系数，根据数学表达式可以得到，IT2 PID FLC的等效增益系数比传统的PID控制器要小，更保守的系数，能确保系统更不容易震荡，相关的仿真实验也验证理论分析的正确性。
3. 针对广义二型模糊集难以与区间二型模糊集想联系起来，根据 α 平面的相关知识，将IT2 PID FLC的理论分析推广到广义的二型模糊集上，并分析介于GT2 FLS与IT2 FLS之间的QT2 FLS，仿真的实验效果表明QT2 FLC的控制效果与IT2 FLC相近，当是由于结合了部分T1 FLC的特性，QT2 FLC可能在有比较大滞后的系统上也能有不错的性能表现。
4. 气动肌肉有非线性，迟滞性以及分段性，很考验控制器的控制性能，基于这个模型，建立相关的仿真实验，并考虑参数自由度的问题，比较公平地比较T1，IT2，QT2这三种控制器的控制性能。由于遗传算法的优化，在训练模型上，3者的效果差别不大，在测试模型上，则有一定的区别。整体来看IT2 FLC与QT2 FLC的控制效果差别不大。

虽然本文在理论部分详细的分析GT2 FLC，但是也有不少问题需要以后进一步解决。

1. 等效增益的有效范围只在一部分内有效，其他区域，FOUs展现何种特性，还需要进一步分析。
2. 本文主要在仿真上进行相关的实验分析，在仿真上的性能表现是否与实物上一致，还有待相关的实物实验验证，
3. 在建立气动肌肉的离散模型上，由于需要比较小的采样点才能比较解近数学模型，然后用GA算法优化需要花费大量的时间，如何减少优化时间是个值得思考的问题，后续或者可以使用更快的优化算法，例如梯度下降法寻优。

致 谢

值此毕业论文将要完成之际，由衷地向我的导师伍冬睿教授表示真诚的感谢以及敬意。在论文选题的确定以及理论部分的推导过程中，伍老师都给予了很多的指导与建议。虽然，只有短短两年的学习时间，但伍老师严谨的科学态度，渊博的知识，踏实的生活作风，以及一丝不苟的治学态度都给我留下的深刻的印象，还有勤恳的工作作风很让人佩服，这些都值得我以后在工作中值得学习。除了，指导我学习，同时，也教会了我不少做人的道理，教书也育人。对于导师在我生活，学习上的关心与帮助，学生将永远不会忘记。

两年的研究生涯，如白驹过隙，相对于本科生涯，还是有诸多收货。在每周的周会上，虽然实验室的研究方向都大不相同，但每一次的周会，都能开阔我的不少视野，学习很多新的知识，而不只是局限于自己的领域。感谢学校给我们提供良好的学习环境。

感谢黄剑教授已经他的学生陈诚在实验上的指导与帮助！同时，也衷心感谢在华科认识的所有的同学们：何赫，崔雨琪，石振华，王阳，刘子涵，谭显峰，张潇，赵昶铭等在我生活与学习上的帮助。

同时，也特别感谢父母与哥哥，感谢他们在我研究生生涯所给予的支持，关心与鼓励。

最后，再次衷心的感谢所有帮助和关心过我的老师，朋友，同学们，谢谢！

参考文献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, 8:338–353.
- [2] Wang L X. *A course in fuzzy system and control*. U.K., London:Prentice-Hall, 1997.
- [3] Mamdani E H, Assilian S. An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller. *International Journal of Man-machine Studies*, 1975, 7:1–13.
- [4] Holmblad L P, Ostergaard J J. Control of a cement kiln by fuzzy logic techniques. *IFAC Proceedings*, 1981, pages 809–814.
- [5] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15:116–132.
- [6] Hagrass H. A Hierarchical Type-2 Fuzzy Logic Control Architecture for Autonomous Mobile Robots. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2004, 12:524–539.
- [7] Lynch C, Hagrass H, Callaghan V. Using Uncertainty Bounds in the Design of an Embedded Real-Time Type-2 Neuro-Fuzzy Speed Controller for Marine Diesel Engines. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int’l Conf. on Fuzzy Systems*, Vancouver, Canada, July, 2006, 7217-7224.
- [8] Kayacan E, Maslim R. Type-2 fuzzy logic trajectory tracking control of quadrotor VTOL aircraft with elliptic membership functions,. *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, 2017, 22(1):339–348.
- [9] Liu X. The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2007, 45:68–81.
- [10] J. Huang D W, Ri S. Interval type-2 fuzzy logic modeling and control of a mobile two-wheeled inverted pendulum. in: *Proceedings of IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2018.
- [11] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-1. *Information Sciences*, 1975, 8:199–249.
- [12] Yager R. Fuzzy subsets of type-2 in decisions. *Journal of Cybernetics*, 1980, 10:137–159.
- [13] Ozen T, Garibaldi J M. Effect of Type-2 Fuzzy Membership Function Shape on Modeling Variation in Human Decision Making. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int’l Conf. on Fuzzy Systems*, Budapest, Hungary, July, 2004, 971-976.
- [14] Mendel J M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2001.
- [15] Melin P, Castillo O. A new method for adaptive model-based control of non-linear plants using type-2 fuzzy logic and neural networks. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int’l Conf. on Fuzzy Systems*, St. Louis, MO, May, 2003, 420-425.
- [16] Wu D, Tan W W. A Type-2 Fuzzy Logic Controller for the Liquid-level Process. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int’l Conf. on Fuzzy Systems*, Budapest, Hungary, July, 2004, 953-958.

- [17] Lee C H, Lin Y C. Control of Nonlinear Uncertain Systems Using Type-2 Fuzzy Neural Network and Adaptive Filter. in: Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Networking, Sensing and Control, Taipei, Taiwan, March, 2004, 1177-1182.
- [18] Karnik N N, Mendel J M. Operations on type-2 fuzzy sets. Fuzzy sets and systems, 2001, 122(2):327-348.
- [19] Mizumoto M, Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type 2. Information and control, 1976, 31(4):312-340.
- [20] Mendel J M, John R I. Type-2 fuzzy sets made simple. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2002, 10(2):117-127.
- [21] Liang Q, Mendel J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: Theory and design. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2000, 8(5):535-550.
- [22] Wu D, Mendel J M. Enhanced Karnik-Mendel Algorithms. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2009, 17(4):923-934.
- [23] Melgarejo M. A fast recursive method to compute the generalized centroid of an interval type-2 fuzzy set. in: Proceedings of Proc. NAFIPS, San Diego, CA, June, 2007, 190-194.
- [24] Duran K, Bernal H, Melgarejo M. Improved iterative algorithm for computing the generalized centroid of an interval type-2 fuzzy set. in: Proceedings of Proc. NAFIPS, New York, May, 2008, 1-5.
- [25] Wu D, Nie M. Comparison and Practical Implementation of Type-Reduction Algorithms for Type-2 Fuzzy Sets and Systems. in: Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems, Taipei, Taiwan, June, 2011, 2131-2138.
- [26] Hu H Z, Zhao G, Yang H N. Fast algorithm to calculate generalized centroid of interval type-2 fuzzy set. Control Decis., 2010, 25(4):637-640.
- [27] Wu H, Mendel J M. Uncertainty Bounds and their Use in the Design of Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2002, 10(5):622-639.
- [28] Wu D, Tan W W. Computationally Efficient Type-Reduction Strategies for a Type-2 Fuzzy Logic Controller. in: Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems, Reno, NV, May, 2005, 353-358.
- [29] Nie M, Tan W W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems. in: Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems, Hong Kong, June, 2008, 1425-1432.
- [30] Tao C W, Taur J S, Chang C W, et al. Simplified Type-2 Fuzzy Sliding Controller for Wing Rock System. Fuzzy sets and systems, 2012, 207(16):111-129.
- [31] Greenfield S, Chiclana F, Coupland S, et al. The collapsing method of defuzzification for discretised interval type-2 fuzzy sets. Information Sciences, 2008, 179(13):2055-2069.
- [32] Coupland S, John R I. Geometric Type-1 and Type-2 Fuzzy Logic Systems. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2007, 15(1):3-15.

- [33] Liang Q, Mendel J M. Equalization of nonlinear time-varying channels using type-2 fuzzy adaptive filters. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5):551–563.
- [34] Li C, Yi J, Zhao D. A Novel Type-Reduction Method for Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems. in: *Proceedings of Proc. 5th Int'l Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, Jinan, Shandong, China, March, 2008, 157-161.
- [35] Wu D, Tan W W. A Simplified Type-2 Fuzzy Controller for Real-Time Control. *ISA Trans.*, 2006, 15(4):503–516.
- [36] Wu D, Tan W W. A Simplified Architecture for Type-2 FLSs and Its Application to Nonlinear Control. in: *Proceedings of Proc. IEEE Conf. on Cybernetics and Intelligent Systems*, Singapore, Dec., 2004, 485-490.
- [37] Wu D. Approaches for Reducing the Computational Cost of Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems: Overview and Comparisons. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2013, 21(1):80–99.
- [38] Begian M, Melek W, Mendel J. Stability analysis of type-2 fuzzy systems. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems*, Hong Kong, June, 2008, 947-953.
- [39] Wu D, Mendel J M. On the Continuity of Type-1 and Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 2011, 19(1):179–192.
- [40] Wu D, Mendel J M. Designing Practical Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple. in: *Proceedings of Proc. IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Beijing, China, July, 2014, 800-807.
- [41] Kim J, Moon Y, Zeigler B P. Designing Fuzzy Net Controllers Using Genetic Algorithms. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, 15(3):66–72.
- [42] Mizumoto M. Realization of PID Controls by Fuzzy Control Methods. *Fuzzy Sets and Systems*, 1995, 70:171–182.
- [43] Mamdani E H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proc. IEE*, 1974, 121(12):1585–1588.
- [44] King P J, Mamdani E H. The Application of Fuzzy Controller Systems to Industrial Processes. *Automatica*, 1977, 13:235–242.
- [45] Mendel J M, Wu H. Properties of the Centroid of an Interval Type-2 Fuzzy Set, Including the Centroid of a Fuzzy Granule. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems*, Reno, NV, May, 2005, 341-346.
- [46] Wu D, Tan W W. Interval Type-2 Fuzzy PI Controllers: Why They Are More Robust. in: *Proceedings of Proc. IEEE Int'l Conf. on Granular Computing*, San Jose, CA, August, 2010, 802-807.
- [47] Persson P. Towards Autonomous PID Control: [PhD Dissertation]. Lund Institute of Technology, 1992.
- [48] Mendel J M, liu F. On New Quasi-Type-2 Fuzzy Logic Systems. in: *Proceedings of Proc. International Conference on Computational Intelligence*, 2008.

附录 1 攻读学位期间发表论文目录

- [1] Zhikang Song, Jian Huang, Dongrui Wu. "Performance comparison of efficient type-reduction approaches for interval type-2 fuzzy logic control", IEEE Conf. on CAC, 2017, 1588-1592.